MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i
Funktionalanalys ENM, TMA401/ Tillämpad funktionalanalys GU, MMA400,
DATUM 2010-08-28, TID 8.30-13.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Richard Lärkäng, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt.

1. Prove the existence and uniqueness of solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda \arctan u(x^2), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 1, u(1) = 1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

Here λ is a real number with $|\lambda| \le 1$ and all functions are real-valued. What can you say if λ is an arbitrary real number?

(4p)

2. Let $k \in C([0,1] \times [0,1])$. Show that

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy$$

defines a bounded linear operator on $C([0,1])$ and that

$$\|T\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\,dy.$$

(4p)

3. Let $H = L^2([0,1])$ and consider the operator

$$Tf(x) = \sqrt{3}xf(x^3).$$

Show that $T \in \mathcal{B}(H)$ and find $\|T\|$. Show that T^{-1} exists and that $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Determine $T^{-1}g(y)$ for $g \in H$ and find $\|T^{-1}\|$. Show that $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \|T\|\}$.

(4p)

P.T.O

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Prove that weakly convergent sequences in a Hilbert space are bounded.

(4p)

6. Let H be a Hilbert space with an ON-basis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Let $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ be a linearly independent set, i.e. no y_n lies in the closure of the span of the other y_m:s, such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\|x_n - y_n\|^2 < \infty.$$

Show that every $x \in H$ can be written uniquely as a linear combination $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Use e.g. the following route to prove the statement: For $n = 1, 2, \ldots$ set $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$ and define $T : H \to H$ by

$$T(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n.$$

Show that the series above converges by considering $T(x) - x = (T - I)(x)$. Show that $T - I$ is a bounded linear mapping that is compact. Show that $\mathcal{N}_T = \{\mathbb{0}\}$. Then conclude that $T = I + (T - I)$ has the range H.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK