MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i
Funktionalanalys ENM, TMA401/ Tillämpad funktionalanalys GU, MMA400,
DATUM 2010-01-14, TID 8.30-13.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Lindgren, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt.

---

1. Prove the existence and uniqueness of solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x(1-x)), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 2, u(1) = 1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

2. Show that $Y = \{\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2 : x_{2k+1} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ is a closed subspace of l^2 and find $Y^{\perp}$.

(4p)

3. Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Define for positive integers n

$$a_n(x) = f(x-n),\ \ b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\frac{x}{n}).$$

Show that the sequences $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge weakly to $\mathbb{0}$ in $L^2(\mathbb{R})$.

(4p)

P.T.O

4. State and prove Riesz representation theorem.

(4p)

5. Let A be a bounded linear operator on a Hilbert space H. Show that

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle A(x), y\rangle|.$$

Moreover show that for self-adjoint operators B on H we have

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle B(x), x\rangle|.$$

Finally show that the last formula is not valid for bounded linear operators on H in general.

(5p)

6. Let K be a compact set in a Banach space X. Show that the closure of the convex hull of K is compact.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK