MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i
Funktionalanalys ENM, TMA401/ Tillämpad funktionalanalys GU, MMA400,
DATUM 2009-10-21, TID 8.30-13.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Peter Kumlin, 7723532.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt.

---

1. Prove the existence and uniqueness of solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 2u(1) = 2, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

2. Let H be a Hilbert space. Assume that $\mathbb{0} \neq a \in H$. Show that

$$\frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|} = \inf_{y \in \{a\}^\perp} \|x - y\|.$$

Moreover calculate

$$\inf_{f \in L^2([0,1]) \text{ with } \int_0^1 f(x)\,dx = 0} \|e^x - f(x)\|_{L^2}.$$

(3p)

3. Let T be defined on $L^2([0,1])$ by

$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

Show that $T \in \mathcal{B}(L^2([0,1]), L^2([0,1]))$. Calculate T^*. Show that T is a compact operator on $L^2([0,1])$. Prove that $\sigma(T) = \{0\}$.

(5p)

P.T.O

4. (a) State and prove (a version of) Banach's fixed point theorem.
   (b) Let $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of contractions on a Banach space X. Moreover assume that $F_n(x) \to F(x)$ uniformly on X, where F is a mapping on X, and let x_n denote fixed points for the mappings F_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Show that if $x_n \to x_0$ or $F(x_n) \to x_0$ in X then x_0 is a fixed point for F.

(5p)

5. State and prove the "Method of continuity".

(4p)

6. Let H be a complex Hilbert space and let T be a self-adjoint operator that satisfies $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ for all $x \in H$. Show that

$$|\langle T(x), y\rangle|^2 \leq |\langle T(x), x\rangle| \cdot |\langle T(y), y\rangle|$$

for all $x, y \in H$.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK