MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Functional Analysis, TMA401/MMA400, 2009-01-15 (8.30-13.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Aron Lagerberg, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt (bonuspoäng inkluderade).

---

1. Calculate
$$\lim_{j\to\infty} \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{j+n}$$
for $(x_1, x_2, \ldots) \in l^2$.

(3p)

2. Set
$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{1+(x-y)^2}\, dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$
Prove that T defines a linear bounded and self-adjoint operator on $L^2(\mathbb{R})$. Show that T is not a compact operator.

(6p)

3. Let P be the set of all ordered pairs $f = (f_1, f_2)$ of real-valued continuous functions on $[0,1]$. Show that P is a Banach space if we define addition and scalar multiplication in the obvious way, and define $\|f\|_P = \max\{\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty\}$. Show that the coupled integral equations
$$\begin{cases} u(x) = \lambda \int_0^1 e^{xy} \frac{u(y)}{1+u^2(y)+v^2(y)}\, dy \\ \\ v(x) = \mu \int_0^1 e^{xy} \frac{u(y)v(y)}{1+u^2(y)+v^2(y)}\, dy \end{cases}$$
have no nontrivial solutions if $|\lambda| < 1/2e$ and $|\mu| < 1/e$.

(4p)

4. Let $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in C([0,1])$ and
$$Lu = u^{(n)} + c_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + c_1 u' + c_0 u, \quad u \in C^n([0,1]).$$
Moreover we assume that
$$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i = 0, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, n$$

are complex numbers and that

$$R_j u = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij} u^{(i)}(0) + \beta_{ij} u^{(i)}(1)],\ j = 1, \ldots, n$$

are boundary operators. Furthermore we set

$$Ru = (R_1 u, \ldots, R_n u)$$

$$C^n_R([0,1]) = \{u \in C^n([0,1]) : Ru = 0\}$$

and

$$L_0 u = Lu,\ u \in C^n_R([0,1]).$$

Assume that L_0 is symmetric and is a bijection. Moreover let $(\mu_n)_1^\infty$ denote the eigenvalues for L_0 counted with multiplicity and assume that $(e_n)_1^\infty$ is a corresponding sequence of orthonormal eigenfunctions. Show that $(e_n)_1^\infty$ is an ON-basis for $L^2([0,1])$ and that the solution to the equation

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases},$$

where $f \in C([0,1])$, is given by

$$u = \Sigma_{n=1}^\infty \frac{1}{\mu_n} \langle f, e_n \rangle e_n \quad (\text{in } L^2([0,1])).$$

All theorems and lemmas used for the proof should be stated properly.

(5p)

5. Let H be a complex Hilbert space and let $T \in \mathcal{B}(H,H)$. Define T^*, also show that it exists, and that $T^* \in \mathcal{B}(H,H)$ with $\|T^*\| = \|T\|$. Also show that $T \mapsto T^*$ is a linear continuous operator on $\mathcal{B}(H,H)$.

(4p)

6. Let E be an inner product space and let $\lambda > 0$. Prove that

$$|\langle x, y \rangle| \leq \lambda \|x\| + \frac{1}{4\lambda} \|y\|, \quad x, y \in E.$$

(3p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter