MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Functional Analysis, TMA401/MMA400, 2008-10-22 (8.30-13.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Cromvik, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt (bonuspoäng inkluderade).

---

1. Consider the differential operator $L = (\frac{d}{dx})^2 + 1$ on $C([0, \pi])$ with homogeneous boundary conditions $R_1 u = u'(0) = 0,\ R_2 u = u(\pi) = 0$.

   (a) Calculate the Green's function $g(x, t)$.

   (b) Is L with the boundary conditions R_1, R_2 (denoted by L_0 in the lecture notes) symmetric?

   (c) Calculate the eigenvalues and eigenfunctions for the operator L_0.

   (d) Give the solution to
   $$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f \in C([0, \pi]) \\ u'(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$
   in terms of
   - the Green's function, and
   - the spectral theorem representation respectively.

(5p)

2. Define $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ by
   $$Tf(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{1 + x + y}\, dy, \quad x \in [0, 1].$$
   Here the vector space $C([0, 1])$ is equipped with the standard norm $\|f\| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$. Show that T is a bounded linear mapping[1] on $C([0, 1])$ and calculate $\|T\|$. Is there a function $f \neq \mathbb{0}$ such that
   $$\|Tf\| = \|T\| \cdot \|f\|?$$
   For given $g \in C([0, 1])$, does the equation
   $$f = g + Tf$$

[1] You should also prove that $Tf \in C([0, 1])$ for $f \in C([0, 1])$.

have a unique solution?

(4p)

3. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis for a complex Hilbert space H with norm $\|\cdot\|$. Assume that the sequence $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in H satisfies

   - $\|f_n\| = 1$ for all n, and
   - $f_n \perp e_1, f_n \perp e_2, \ldots, f_n \perp e_n$ for all n.

   Show that $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converges weakly to $\mathbb{0}$ in H.

(3p)

4. (a) State and prove (one version of) the Banach's fixed point theorem.

   (b) State (one version of) the Schauder's fixed point theorem.

(5p)

5. Let H be a complex Hilbert space and let $T \in \mathcal{B}(H, H)$. Show that the closure of $\mathcal{R}(I + T^*T)$ is equal to H.

(4p)

6. Let l^1 denote the standard vector space but now with the norm

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\|_* = \sup_{n=1,2,\ldots} |\Sigma_{k=1}^{n} x_k|.$$

   Show that $\|\cdot\|_*$ indeed is a norm on l^1 and show that $(l^1, \|\cdot\|_*)$ is not a Banach space.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter