MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Functional Analysis, TMA401/MMA400, 2008-01-17 (8.30-13.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jonas Hartwig, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 12.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt (bonuspoäng inkluderade).

1. Prove uniqueness and existence of a solution to the following BVP:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda \frac{u(x)}{1+u^2(x)} = \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

Here λ is a real number with $|\lambda| \le 7$ and all functions are real-valued. What can you say if λ is an arbitrary real number?

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis for a Hilbert space H and assume that $T : H \to H$ is a bounded linear operator on H such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Show that if $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is another ON-basis for H then

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

Moreover show that

$$\|T\|^2 \le \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

(4p)

3. Let $a > 0$. For $f \in C([0,1])$ set

$$|||f||| = \min\{\|f\|, \|f\|_*\},$$

where $\|f\| = \max_{0 \le t \le 1} |f(t)|$ and $\|f\|_* = a \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Give a necessary and sufficient condition on a for $|||\cdot|||$ to be a norm on $C([0,1])$.

(4p)

4. State and prove Hilbert-Schmidt theorem.

(5p)

5. State and prove the method of continuity.

(4p)

6. Let X be a Banach space and let T be a surjective mapping on X satisfying

$$\|T(x) - T(y)\| \geq K\|x - y\| \quad \text{all } x, y \in X,$$

where $K > 1$. Show that T has a unique fixed point.

(4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Peter