TMA401/MMA400 Functional Analysis 2010/2011
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Gamla tentor från

2000 – 2007

lösningsförslag levereras separat

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
*Telefon:*Magnus G 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–09–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Set $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ and $f_3(x) = x^2$. Find an ON-sequence $(g_n)_{n=1}^3$ such that
$$\text{Span}\{f_n : n = 1, 2, 3\} = \text{Span}\{g_n : n = 1, 2, 3\}$$
in the Hilbert space of realvalued funtions on [0.1] with the inner product
$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^1 h_1(x)h_2(x)x\,dx.$$
(4p)

2. Show that the boundary value problem
$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \sin u(x) = \cos x, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$
has a unique solution $u \in C^2$.

(4p)

3. Let X be a Banach space and let $T : X \to X$ be a mapping with the following property: There exist real numbers $\alpha > 1$ and $C > 0$ such that
$$\|T(x) - T(y)\| \le C\|x - y\|^\alpha$$
for all $x, y \in X$. Show that there exists a $x_0 \in X$ such that $T(x) = x_0$ for all $x \in X$.

(4p)

4. Give the definition of compact operator on a Hilbert space and show that every compact operator is bounded.

(4p)

5. Give the definition of strong and weak convergence of a sequence on a Hilbert space H. Show that strong convergence implies weak convergence. Give an example of a weakly convergent sequence on a Hilbert space that does not converge strongly (including a proof of the statement).

(5p)

6. Assume that $T : X \to X$ is a mapping on a Banach space X and that there exist real numbers $c_n,\ n = 1, 2, 3, \dots$ satisfying $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ such that

$$\|T^n x - T^n y\| \le c_n \|x - y\|$$

for all positive integers n and all $x, y \in X$. Show that the sequence $(T^n z)_{n=1}^{\infty}$ converges for every $z \in X$ and that the limit is a fixed point for T and that the fixed point is unique.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Elisabeth Wulcan 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–06–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Set
$$Tf(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x-t) f(t)\, dt, \quad x \in [0, 2\pi].$$
Show that T is a bounded linear and compact operator when T is considered as an operator on
   (a) the Banach space $C([0, 2\pi])$,
   (b) the Banach space $L^2([0, 2\pi])$.

(4p)

2. Show that the boundary value problem
$$\begin{cases} u''(x) + \lambda \sin u(x^2) = u(x), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$
has a unique solution $u \in C^2$ for $|\lambda|$ small enough. Give an estimate $\lambda_0 > 0$ such that the problem has a unique solution for all $|\lambda| < \lambda_0$.

(4p)

3. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON basis for a Hilbert space H. For each n set $f_n = e_{n+1} - e_n$. Show that $\text{span}\{f_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ is dense in H.

(4p)

4. State and prove (a version of) Banach's contraction fixed point theorem.

(4p)

5. Let A be a bounded linear operator $H \to H$ where H is a Hilbert space. Define the adjoint operator A^* and show that it is a well-defined bounded linear mapping on H with $\|A^*\| = \|A\|$.

(5p)

6. We say that an inner product space $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ has the Riesz property if every bounded linear functional f on E is given by $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ for some $x_0 \in E$. Riesz representation theorem implies that every Hilbert space E has the Riesz property. Show that every inner product space with the Riesz property must be a Hilbert space.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU

Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Aron L/Roger A 0762-721860

Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2007–01–18
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that there exists a unique C^2-function $u(x)$ defined on $[0,1]$ with $u(0) = u(1) = 0$ such that

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \ x \in [0,1].$$

(4p)

2. Show that there exists a function $f(x)$ defined on $[0,1]$ with $\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = 1$ such that

$$\int_0^1 f(x)e^{-x} \, dx = \sup\{\int_0^1 g(x)e^{-x} \, dx : \int_0^1 |g(x)|^2 \, dx = 1\}.$$

Calculate $f(x)$ and $\int_0^1 f(x)e^{-x} \, dx$.

(4p)

3. Suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ whenever $x \neq y$ and has no fixed points. Show that either

$$f^n(x) \to +\infty \ \text{ as } \ n \to \infty \ \text{ for all } x \in \mathbb{R}$$

or

$$f^n(x) \to -\infty \ \text{ as } \ n \to \infty \ \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

Here f^n denotes the composition of f with itself n times.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let A be a bounded linear operator on a Hilbert space H. Define the adjoint operator A^*, show that it exists as a bounded linear operator on H and show that $\|A^*\| = \|A\|$.

(4p)

6. Let T be a linear mapping on a complex inner product space E such that $\|Tx\| = \|x\|$ for all $x \in E$. Show that $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ for all $x, y \in E$.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Oscar Marmon 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–09–02
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the family of all solutions of the ODE $y'' = y$ in the interval $(0,1)$ is a subspace of $C((0,1))$. Show that the family of all solutions of $y'' = y^2$ is not a subspace of $C((0,1))$.

(4p)

2. Show that $Y = \{x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2 : x_{2k} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ is a closed subspace of l^2 and find $Y^{\perp}$.

(4p)

3. Consider

$$f(x) + c\int_0^1 (x+t)f(t)\,dt = g(x) \in C([0,1]), \quad x \in [0,1].$$

Assuming $c^2 + 12c - 12 \neq 0$, solve the equation.

(4p)

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Show that the adjoint operator of a compact operator is compact.

(4p)

6. Suppose[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ whenever $x \neq y$. Show that there exists a $\xi \in [-\infty, \infty]$ such that for any real x, $f^n(x) \to \xi$ as $n \to \infty$. Here f^n denotes the composition of f with itself n times.

[1] Hint: Consider the the two cases that f has a fixed point and that f has no fixed point respectively.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Milena Angelova 0762-721860, Peter Kumlin 0739-603800
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–05–29
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Consider the complex vector space c_0 of all sequences $\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n \to 0$ in $\mathbb{C}$ as $n \to \infty$. Let $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ be the decreasing rearrangement[2] of $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$. Define for $\mathbb{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

$$\|\mathbb{x}\|_* = \sup_{m=1,2,3,\dots} \frac{1}{\sqrt{m}} \Sigma_{n=1}^{m} x_n^*$$

and set $d_0 = \{\mathbb{x} \in c_0 : \|\mathbb{x}\|_* < \infty\}$. Show that $\|\cdot\|_*$ is a norm on d_0.

(4p)

2. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u^2(x^2) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a solution u with the property $\max_{0\le x\le 1} |u(x)| \le 1$. Show that the solution is unique.

(4p)

3. Let T be the integral operator on the complex Hilbert space $L^2([-\pi,\pi])$ defined by

$$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k(x,t) f(t)\, dt,$$

[2] For each positive integer n we denote by x_n^* the real number x that satisfies

$$|\{k : |x_k| > x\}| < n \le |\{k : |x_k| \ge x\}|.$$

Here $|A|$ denotes the number of elements in the set A.

where $k(x,t) = (\sin x + \sin t)^2 - \frac{1}{8}$. Show that T is self-adjoint and calculate $\|T\|$. Find all nonzero eigenvalues and corresponding eigenfunctions for T and determine $\sigma(T)$. Solve the equation

$$Tu = \pi u - \frac{5\pi}{4}$$

in $L^2([-\pi, \pi])$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(4p)

5. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a weakly convergent sequence in a Hilbert space H. Prove that $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is a bounded sequence in H.

(5p)

6. Let $T : H \to H$ be a compact linear mapping on a Hilbert space H. Show that

   (a) $\dim \mathcal{N}(I + T) < \infty$

   (b) $\dim \mathcal{N}(I + T^*) = \dim \mathcal{N}(I + T)$

   Here I denotes the identity operator on H and T^* the adjoint operator of T.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 3,4,5.
Telefon: Marcus Better, 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2006–01–12
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem:

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]). \end{cases}$$

(4p)

2. Set $H = L^2([0,1])$. Let T be given by

$$Tf(x) = \int_{1-x}^{1} f(t)\,dt.$$

Show that

(a) T is a bounded linear operator on H and
(b) calculate the kernel $k(x,t)$ for T and show that T is self-adjoint.
(c) Moreover calculate the kernel $k_2(x,t)$ for T^2 and
(d) find[3] all eigenvalues and eigenfunctions for T.
(e) Finally calculate $\|T\|$.

(8p)

[3]Hint: Let f be an eigenfunction for T and calculate $(T^2 f)''$. Show that f is a solution to the equation $\lambda^2 f'' + f = 0$.

3. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

4. Let $\mathcal{K}(H)$ be the subset of all compact linear operators $H \to H$ on a Hilbert space H in $\mathcal{B}(H)$ with the operator norm. Show that $\mathcal{K}(H)$ is a **closed subspace** in $\mathcal{B}(H)$.

(4p)

5. For non-negative integers k let $C^k(0,1)$ be the vector space of k times continuously differentiable functions $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ such that

$$\|f\|_k = \sup_{t \in (0,1)} \Sigma_{l=0}^{k} |f^{(l)}(t)| < \infty.$$

Show that $X_k = (C^k(0,1), \|\cdot\|_k)$ is a Banach space and that the identity map $I : X_k \to X_{k-1}$, $f \mapsto f$, is a compact operator.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU

Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Johan Jansson, 0762-721860
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2005–08–27
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda\cos(1+u(x)) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| \le \epsilon$, ϵ small. Give an upper bound on ϵ .

(4p)

2. Define $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ by

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt,$$

where

$$k(x,t) = \begin{cases} 1 & x \ge t \\ 0 & x < t \end{cases}.$$

Find $\sigma(T)$.

(4p)

3. Let $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 2, 0, \ldots)$ where the numbers 1 and 2 appear in the positions n and $n+1$ and let $y_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ with the number 1 in the first n positions. Consider these as vectors in l^2. Prove that for all $n = 1, 2, \ldots$

$$y_n \notin \overline{\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \ldots\}}.$$

(4p)

4. State and prove the Lax-Milgram Theorem.

(5p)

5. Show that every weakly convergent sequence in a Hilbert space is bounded.

(4p)

6. Let $f : E \to \mathbb{C}$ be a linear functional on a normed space E. Assume that $\mathcal{N}(f)$ is closed. Show that f is bounded.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 031-7723532, 0739-603800
Lärare besöker skrivsalen ca 9.30 och 11.30.

Datum: 2005–05–25
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: V

---

1. Show that the boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) + \lambda \cos(1 + u(x)) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| \le \epsilon$, ϵ small. Give an upper bound on ϵ .

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis in a Hilbert space H and define the operator T by

$$T(\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n e_{n-1}.$$

Show that T is compact and find T^*. Find[4] $\sigma_p(T)$ and $\sigma_p(T^*)$.

(4p)

3. Let $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$ be linearly independent where H is a Hilbert space. Show that there exist $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ such that

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

(4p)

[4] $\sigma_p(A) = \{\lambda : \lambda \text{ eigenvalue to } A\}$.

4. State and prove the Orthogonal Projection theorem[5]. Also the "Closest Point Property" theorem should be proved.

(5p)

5. Let $T \in \mathcal{B}(X, X)$ where X is a Banach space and $\|T\| < 1$. Show that $I + T$ is an invertible operator, i.e. $(I + T)^{-1} \in \mathcal{B}(X, X)$.

(4p)

6. Let $T : H \to H$ be a linear mapping in a Hilbert space H. Assume that $Tx_n \rightharpoonup Tx$ for every $x_n \to x$. Show that $T \in \mathcal{B}(H, H)$.

(4p)

Good Luck!!
PK

[5]Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU

Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon:

Datum: 2005–01–14

Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let T be a positive compact self-adjoint operator on a Hilbert space H with $\|T\| \le 1$. Give an upper estimate[6] for

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

3. Let $k \in L^2([0,\pi] \times [0,\pi])$ and consider the linear mapping

$$T : L^2([0,\pi]) \to L^2([0,\pi])$$

given by

$$Tf(x) = \int_0^\pi k(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in [0,\pi]$$

for $f \in L^2([0,\pi])$. One standard estimate for the operator norm for T is

$$\|T\| \le \|k\|_{L^2([0,\pi]\times[0,\pi])}.$$

Prove[7] that also the following estimate is true:

$$\|T\| \le (\sup_x \int_0^\pi |k(x,y)|\, dy)^{\frac{1}{2}} (\sup_y \int_0^\pi |k(x,y)|\, dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally apply these two estimates to the kernel function $k(x,y) = \cos(x-y)$, i.e. calculate the two upper bounds for the operator norm.

(4p)

---

[6]Better than the trivial estimate 24

[7]Apply the formula $\|g\| = \sup_{\|h\|=1} |\langle g, h\rangle|$ to Tf. Also the estimate $ab \le \frac{c}{2}a^2 + \frac{1}{2c}b^2$ for all $a, b \in \mathbb{R}$ and $c > 0$ can come in handy.

4. State and prove Banach's fixed point theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let X be a finite-dimensional vector space with a norm $\|\cdot\|$. Moreover let T be a linear mapping on X that is $1-1$. Show that there exists a $C > 0$ such that
$$\|Tx\| \geq C\|x\| \quad \text{all} \;\; x \in X.$$

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Rolf Liljendahl 073-9979268

Datum: 2004–08–28
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} 5u''(x) + \dfrac{1}{1+u(x)^4} = 1, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an orthonormal basis for a Hilbert space H and set

$$\begin{cases} f_0 = e_1 \\ f_k = e_{2k+1} \quad k > 0 \\ f_k = e_{-2k} \quad k < 0 \end{cases} .$$

Moreover define S by $S(\Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_k) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_{k+1}$. Show that S is a well-defined bounded linear mapping on H, calculate $\|S\|$ and show that S has no eigenvalues.

(4p)

3. Let $(e_k)_{k=1}^{n}$ be a sequence of vectors in a Hilbert space H. Assume that $\|e_k\| = 1$ for all k. Show[8] that

$$\Sigma_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 (1 + (\Sigma_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} |\langle e_k, e_l\rangle|^2)^{\frac{1}{2}})$$

for all $x \in H$. Note that if $(e_k)_{k=1}^{n}$ is an ON-sequence in H then the statement is called Bessel's inequality.

(4p)

[8] Hint: Note that $\Sigma|\langle x, e_k\rangle|^2 = \langle x, \Sigma\langle x, e_k\rangle e_k\rangle$.

4. State and prove the Lax-Milgram theorem.

(5p)

5. Let P, Q be orthogonal projections on a Hilbert space such that $PQ = QP$. Show that $P + Q - PQ$ is an orthogonal projection.

(4p)

6. Let $T : H \to H$ be a compact linear operator on a Hilbert space H. Show that $\mathcal{R}(I + T)$ is a closed subspace of H.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 035-52077 eller 0739603800

Datum: 2004–05–29
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) + \dfrac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let $H = L^2([a,b])$, a, b finite, and

$$Tf(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx, \quad x \in [a,b].$$

Show that T is a bounded linear operator $H \to H$ and that T is a projection.

(4p)

3. Let $h \in C([0,1] \times [0,1])$ be a real-valued function such that

$$h(x,y) = h(y,x) > 0$$

for all $x, y \in [0,1]$. Set

$$Tf(x) = \int_0^1 h(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in [0,1]$$

for $f \in L^2([0,1])$. Show that the bounded linear operator T on $L^2([0,1])$ has an eigenvalue $\lambda = \|T\|$ which is simple.

(4p)

4. State and prove the Orthogonal Projection theorem[9]. Also the "Closest Point Property" theorem should be proved.

(5p)

5. Define the notion of weak convergence on a Hilbert space and show that every weakly convergent sequence is bounded.

(4p)

6. Show that for every compact self-adjoint operator T on a Hilbert space there exists an eigenvalue λ of T with $|\lambda| = \|T\|$. Also show that there can be no eigenvalue μ of T with $|\mu| > \|T\|$.

(4p)

Good Luck!!
PK

[9] Often referred to as the Orthogonal Decomposition theorem.

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Karin Kraft 0740-459022

Datum: 2004–01–12
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \dfrac{u(x)}{2+u^2(x)}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a unique solution.

(4p)

2. Let T be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Tf(x) = \int_0^1 (x+y) f(y)\, dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Show that T is bounded and calculate $\|T\|$.

(4p)

3. Show that the following boundary value problem (almost the same as problem 1)

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \lambda \dfrac{u(x)}{2+u^2(x)}, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0, & u \in C^2([0, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a solution for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let T be a mapping on a real normed space X satisfying

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \text{ for all } \lambda \in \mathbf{R} \text{ and } x \in X$$

if T is continuous.

(4p)

6. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be a complete ON-sequence in a Hilbert space H and let $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ be another ON-sequence such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$

Show that the ON-sequence $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ also is complete.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU

Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Anders Logg 0740-459022

Datum: 2003–08–30

Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Show that the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = \lambda \dfrac{u(x)}{1+u^2(x)}, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0, \quad u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda| < \epsilon$ where $\epsilon > 0$ is close to 0. Give an estimate on the size of ϵ.

(4p)

2. Show that the set $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$, where $f_n(x) = x^n$, $-1 \le x \le 1$ and $n = 1, 2, 3. \dots$, is linearly independent and use the Gram-Schmidt process (with the Hilbert space $L^2([-1,1])$) to produce the first three orthogonal vectors, call them g_1, g_2, g_3, out of f_1, f_2, f_3.

(4p)

3. Let $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ be an othonormal sequence in $L^2([0,1])$. Show that the sequence is an orthonormal basis if

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x \overline{u_n(t)}\, dt \right|^2 = x, \quad \text{for all } x \in [0,1].$$

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let H be a Hilbert space. Prove or disprove the statement: Every bounded linear mapping on H preserves orthogonality.

(4p)

6. Let X be a separable Hilbert space and $T : X \to X$ a compact linear operator. Show that T can be approximated by finite rank operators in $\mathcal{B}(H)$, i.e. there exist a sequence of finite rank operators T_n on H such that $T_n \to T$ in operator norm.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Axel Målqvist 0740-459022

Datum: 2003–05–31
Skrivtid: fm (5 timmar)

---

1. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

2. Let $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis for a Hilbert space H and assume that $T : H \to H$ is a bounded linear operator on H such that

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Show that if $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is another ON-basis for H then

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

Moreover show that

$$\|T\|^2 \le \Sigma_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

(4p)

3. Set $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$. For $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ define

$$Mf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \quad x > 0.$$

Show that

$$M : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$$

is a bounded linear mapping on $L^2(\mathbb{R}_+)$, calculate the operator norm of $I - M$ and, finally, determine the adjoint operator of M. Here I denotes the identity operator on $L^2(\mathbb{R}_+)$.

(4p)

4. State and prove the Riesz representation theorem.

(5p)

5. Let $\mathcal{K}(H)$ be the subset of all compact linear operators $H \to H$ on a Hilbert space H in $\mathcal{B}(H)$ with the operator norm. Show that $\mathcal{K}(H)$ is a closed subspace in $\mathcal{B}(H)$.

(4p)

6. Let X be a Banach space and $T : X \to X$ a compact[10] linear operator. Show that there exists a constant C such that for every $y \in \mathcal{R}(I + T)$ there exists a $x \in X$ with $y = (I + T)x$ such that

$$\|x\| \leq C\|y\|.$$

(4p)

Good Luck!!
PK

[10] Exactly the same definition as for a linear operator on a Hilbert space

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Erik Broman 0740-459022

Datum: 2002–08–21
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: VV22

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)^2 f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Calculate

(a) A^*
(b) $\|A\|$.

(1+3p)

2. Consider the differential equation

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Formulate the boundary value problem as a fixed point problem $u = Tu$, where T is an integral operator.
(b) Set $B = \{u \in C([0,1]) : \|u\|_\infty \le 1\}$. Show that T maps B into itself provided $0 < \lambda < \lambda_0$ for λ_0 sufficiently small. Give a numerical value on λ_0.
(c) Show that the differential equation is uniquely solvable in B with λ chosen as in (b).

(2+1+1p)

3. Let T be a positive, self-adjoint, compact operator on a Hilbert space H. Show that

$$\langle Tx, x\rangle^n \le \langle T^n x, x\rangle \cdot \langle x, x\rangle^{2(n-1)},$$

for all positive integers n and all $x \in H$.

(4p)

4. State and prove Lax-Milgram's theorem.

(5p)

5. State and prove the orthogonal projection theorem.

(4p)

6. Let A be a subset of a Hilbert space H. Show that $(A^{\perp})^{\perp}$ is the smallest closed subspace of H that contains A.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH & GU
Tentamen i Funktionalanalys TMA401/MAN670
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 0739603800 (eller 035 52077)
(*Om telefonen ovan ej fungerar:* Jana Madjarova 031 7757763)

Datum: 2002–06–01
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Let A be the linear mapping on $L^2([0,1])$ defined by

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1.$$

Calculate

(a) A^*A

(b) $\|A\|$.

(2+2p)

2. Prove the existence and uniqueness of a solution to the following boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

(4p)

3. Let $T : X \to X$ be a mapping (not necessary linear) on a normed space X. Moreover assume that there are real constants C, α, where $\alpha > 1$, such that

$$\|T(x) - T(y)\| \le C\|x-y\|^\alpha, \text{ for all } x, y \in X.$$

Show that there exists a $z \in X$ such that $T(x) = z$ for all $x \in X$.

(4p)

4. State and prove Hilbert-Schmidt's theorem.

(5p)

5. Let A be a bounded operator on a Hilbert space H. Define the adjoint operator A^* (also prove that it exists) and show that A^* is a bounded operator on H with $\|A\| = \|A^*\|$.

(4p)

6. Let T be a self-adjoint operator on a Hilbert space H. Assume that T^n is compact for some integer $n \geq 2$. Prove that T is compact.

(4p)

Good Luck!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 772 3532 (alternativt 0739603800)

Datum: 2002–01–26
Skrivtid: fm (5 timmar)
Lokal: maskin

---

1. Låt H vara ett oändligtdimensionellt Hilbertrum och $T : H \to \mathbf{C}$ en begränsad linjär funktional $\neq 0$. Beräkna dimensionen för det linjära delrummet $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ av H. Ge också ett exempel på ett Hilbertrum H och en funktional T som ovan.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att $u(0) = u(1) = 0$ och

$$u''(x) - \cos^2 u(x) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt T vara en självadjungerad, positiv, kompakt operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| \leq 1$. Ge en uppskattning[11] av

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\|.$$

(4p)

4. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

5. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Banachrum X. Definiera $\sigma(T)$. Låt $\sigma_a(T)$ beteckna det approximativa spektrumet för T, dvs mängden av alla komplexa tal λ för vilka det finns en följder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i X med $\|x_n\| = 1$ så att

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

Visa att $\sigma_a(T)$ är en delmängd av $\sigma(T)$.

[11]En uppskattning bättre än den triviala

$$\|3T^4 - 20T^3 + T^2\| \leq 3\|T\|^4 + 20\|T\|^3 + \|T\|^2 \leq 24.$$

(4p)

6. Givet en tät delmängd S i ett Banachrum X. Låt vidare $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av linjära operatorer på X. Antag att

   (a) $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in S$ och att

   (b) det finns ett $C > 0$ så att

   $$\|T_n x\| \leq C\|x\|$$

   för alla n och alla $x \in X$.

   Visa att $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existerar för alla $x \in X$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH

Tentamen i Funktionalanalys TMA400

Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).

Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.

Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

Teoriuppgifter: 4,5,6.

Telefon: Robert Berman 0740-459022

Datum: 2001–08–29

Skrivtid: em (5 timmar)

Lokal:

---

1. Låt l^2 beteckna Banachrummet av alla sekvenser $(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ med elementvis addition och multiplikation med skalär och med den vanliga normen $\|\mathbf{x}\|^2 = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$. För varje $\mathbf{x} \in l^2$ definiera

$$(T\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_{n+1} + 2x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k, k \in \mathbf{Z} \\ 2x_{n+1} + x_{n-1} + 10x_n, & n = 2k+1, k \in \mathbf{Z} \end{cases} .$$

Avgör om T är

(a) en begränsad linjär operator på l^2

(b) självadjungerad

(c) en inverterbar operator[12].

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0, 1]$ sådan att

$$u(0) - 2u(1) = u'(0) - 2u'(1) = 0$$

och

$$4u''(x) - |u(x) + x| = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(4p)

3. Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\dim \mathcal{R}(T) = 1$. Visa att för alla $y \in \mathcal{R}(T)$, $y \neq 0$, finns entydigt bestämda $x \in H$ så att

$$Tz = \langle z, x \rangle y, \quad z \in H.$$

Visa också att

$$\|T\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Använd t.ex. detta faktum för att beräkna operatornormen för avbildningen

$$Tf(t) = \int_0^1 e^{t-s} f(s)\, ds, \qquad f \in L^2[0, 1].$$

---

[12] dvs $T^{-1} \in \mathcal{B}(l^2)$.

(4p)

4. Formulera[13] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Givet ett slutet äkta delrum F i ett normerat rum E. Visa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $x \in E$ sådant att $\|x\| = 1$ och $\|x - y\| > 1 - \epsilon$ för alla $y \in F$. Använd t.ex. detta för att visa varje normerat rum X där den slutna enhetsbollen $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ i X är kompakt är ändligtdimensionellt.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[13] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2001–05–30
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: VV

---

1. Sätt
$$Au(x) = \int_0^\pi e^{x+y}\cos(x+y)u(y)\,dy, \qquad x \in [0,\pi].$$
Beräkna operatornormen för A och avgör om A är en kompakt operator då A betraktas som en operator på
   (a) Banachrummet $C[0,\pi]$,
   (b) Banachrummet $L^2[0,\pi]$.

(2p+2p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad på intervallet $[0,1]$ sådan att $u(0) = u'(0) = 0$ och
$$u''(x) - u(x) + \frac{1}{2}(1 + u(x^2)) = 0, \quad x \in [0,1].$$

(4p)

3. Låt E vara ett normerat rum. Visa att det inte kan finnas avbildningar $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att
$$ST - TS = I,$$
där I betecknar identitetsoperatorn på E.

(4p)

4. Formulera[14] och bevisa Banachs fixpunktssats.

(4p)

5. Formulera och bevisa[15] spektralsatsen för självadjungerade kompakta operatorer på Hilbertrum.

(5p)

6. Låt T vara en normal linjär avbildning på ett Hilbertrum H, dvs T är en begränsad operator sådan att T kommuterar med sin adjunkt T^*, eller i klartext

$$TT^* = T^*T.$$

Visa att

(a) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ för alla $x \in H$;

(b) λ är ett egenvärde med egenvektor x till T om och endast om $\overline{\lambda}$ egenvärde med egenvektor x till T^*.

(1p+3p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

[14] Antingen den version som finns i kursboken eller den som är given i fixpunktshäftet.

[15] Beviset ska inkludera bevis av den sats som kallas för Hilbert-Schmidts sats i kursboken.

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: ....

Datum: 2001–02–17
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Maskinhuset

---

1. För $u \in C[0,1]$ sätt

$$(Au)(x) = \int_0^{1-x} |x-y| u(y)\, dy, \quad x \in [0,1].$$

Visa att A är en begränsad linjär operator på Banachrummet $C[0,1]$ samt beräkna operatornormen $\|A\|$.

(4p)

2. Visa att det finns exakt en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u(x)$ definierad i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ sådan att $u'(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0$ och

$$u''(x) + u(x) = \frac{1}{2} \sin u(x^2), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Beräkna här först Greenfunktionen och formulera sedan om differentialekvationen som en integralekvation. Bestäm slutligen funktionen $u(x)$.

(4p)

3. Antag att H är ett Hilbertrum. Använd spektralsatsen för att finna en H-värd lösning $u(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \\ \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases}$$

där A är en kompakt, självadjungerad, positivt definit operator på H. Visa att

$$\|u(t)\| \le \|u_0\|, \quad t \ge 0.$$

(4p)

4. (a) Låt A vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$.
   (b) Definiera vad som menas med att en följd i ett Hilbertrum konvergerar svagt. Ge exempel på en följd som konvergerar svagt men ej starkt.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Niklas Lindholm, 0740-350646

Datum: 2000–08–22
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: VV

---

1. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd, dvs $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. Visa genom att använda Banachs kontraktionssats[16] att det finns en begränsad följd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ som löser
$$x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
där $x_0 = 1$.

(4p)

2. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av
$$(Af)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av
$$(Bf)(x) = \int_0^{\pi} (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$
Funktionerna är komplexvärda.

(4p)

3. Låt T vara definierad för $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ enligt
$$(T\mathbf{x})_n = n x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Visa att $D(T) = \{\mathbf{x} \in l^2 : T\mathbf{x} \in l^2\}$ är en tät delmängd i l^2 och att T är en sluten operator[17] i l^2, dvs att $\mathbf{x}_n \in l^2$ för $n = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{y}$ i l^2, $T\mathbf{x}_n \to \mathbf{z}$ i l^2 medför att $\mathbf{y} \in D(T)$ och $T\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

---

[16] Betrakta avbildningen
$$x_n \mapsto \frac{1}{4}(a_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \quad n = 1, 2 \ldots.$$

[17] Utnyttja t.ex. att T är en självadjungerad operator.

(4p)

4. Låt $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ vara kontinuerliga funktioner på intervallet $I = [0,1]$, där n är ett heltal ≥ 2. Låt vidare α_{ij}, β_{ij} för $i = 0, \ldots, n-1$ och $j = 1, \ldots, n$ vara komplexa tal och sätt

$$R_j u = \Sigma_{i=0}^{n-1}(\alpha_{ij}u^{(i)}(0) + \beta_{ij}u^{(i)}(1)), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Vidare sätt

$$Lu = u^{(n)} + c_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + c_1 u^{(1)} + c_0 u$$

och

$$Ru = (R_1 u, \ldots, R_n u).$$

Ge tillräckliga villkor för att det för varje $f \in C(I)$ ska finnas en unik lösning $u \in C^n(I)$ till problemet

$$\begin{cases} Lu = f \\ Ru = 0 \end{cases}.$$

Redogör dessutom för hur man beräknar u, dvs beskriv hur man bestämmer Greenfunktionen till randvärdesproblemet.

(4p)

5. Formulera och bevisa ”Orthogonal decomposition theorem”.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Extra Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon:

Datum: 2000–06–06
Skrivtid: em (5 timmar)
Lokal:

---

1. Beräkna normen av operatorn $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ given av

$$(Af)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

Beräkna också normen av operatorn $B : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$ given av

$$(Bf)(x) = \int_0^\pi (1 + e^{i(x-y)}) f(y)\, dy.$$

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda |u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning om $|\lambda|$ är tillräckligt litet.

(4p)

3. Antag att $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ är en linjär avbildning sådan att $Tf \geq 0$ om $f \geq 0$. Visa att T är en begränsad operator.

(4p)

4. Definiera vad som menas med (ortogonal) projektionsoperator, att en operator är idempotent, samt visa följande påstående:

Antag att A är en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Visa att A är en (ortogonal) projektionsoperator på H om och endast om A är idempotent och självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Riesz representationssats.

(5p)

6. Låt H vara ett komplext Hilbertrum och A en begränsad linjär operator på H med egenskapen att

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R}$$

för alla $x \in H$. Visa att A är självadjungerad.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

Matematik, CTH
Tentamen i Funktionalanalys TMA400
Hjälpmedel: Inga (inte ens räknedosa).
Personuppgifter: Namn, personnummer, linje, antagningsår.
Inlämning ska ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
Teoriuppgifter: 4,5,6.
Telefon: Peter Kumlin 772 3532

Datum: 2000–05–30
Skrivtid: 8.45 – 13.45 (5 timmar)
Lokal: Gamla M-huset

---

1. Betrakta integraloperatorn

$$Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Visa att A definierar en begränsad linjär operator på de två Banachrummen (reella funktioner)

(a) $C[0, 2\pi]$

(b) $L^2[0, 2\pi]$.

Beräkna operatornormen $\|A\|$ i något av fallen.

(4p)

2. Antag att $f \in C([0,1])$ och $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att ekvationen

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in C^2([0,1]) \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning för $|\lambda|$ litet.

(4p)

3. Betrakta avbildningen

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, \frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \ldots, \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots x_n), \ldots).$$

Visa att detta är en begränsad linjär operator på l^2 som ej är surjektiv.

(4p)

4. Låt $A : H \to H$ vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H. Definiera A^* och visa att den är en väldefinierad begränsad linjär operator på H och att $\|A^*\| = \|A\|$. Visa slutligen att om $A_n \to A$ i $\mathcal{B}(H, H)$ då $n \to \infty$ och om alla A_n är självadjungerade så är också A självadjungerad.

(4p)

5. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats.

(5p)

6. Låt T vara en linjär begränsad operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att det finns ett $x_0 \in H$ så att $Tx_0 = x_0$. Visa att då gäller att $T^*x_0 = x_0$.

(4p)

Motivera väl!
Lycka till!!
PK

TMA401/MMA400 Functional Analysis 2010/20011
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Gamla tentor från

2000 – 2007

lösningsförslag till några tentor

1. We should show that

$$Tf(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in [0, 2\pi]$$

defines a linear bounded and compact operator on

   (a) $C([0, 2\pi])$,

   (b) $L^2([0, 2\pi])$.

   Linearity: standard calculation (omitted here)

   Boundedness: Note that the norms in a) and b) are different!

   (a): $|Tf(x)| \le \int_0^{2\pi} |\sin(x-t)| \cdot |f(t)|\,dt \le \int_0^{2\pi} |\sin(x-t)| \cdot \|f\|\,dt \le 2\pi\|f\|$ implies that T is bounded and $\|T\| \le 2\pi$.

   (b): $\|Tf\|^2 = \int_0^{2\pi} |\int_0^{2\pi} \sin(x-t)f(t)\,dt|2\,dx \le \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x-t)|^2\,dt \cdot \|f\|^2\,dx \le (2\pi)^2\|f\|^2$ implies that T is bounded and $\|T\| \le 2\pi$.

   Compactness:

   (a): This is a consequence of Arzela-Ascoli theorem. More precisely fix a bounded sequence $(f_n)_{n=1}^\infty$ in $C([0, 2\pi])$. Set $M = \sup_n \|f_n\|$. Then

   i) $(Tf_n)_{n=1}^\infty$ is uniformly bounded in $C([0, 2\pi])$ since $\sup_n \|Tf_n\| \le 2\pi M$ and

   ii) $(Tf_n)_{n=1}^\infty$ is equicontinuous on $C([0, 2\pi])$ since $\sin x$ is uniformly continuous on $[-2\pi, 2\pi]$ and hence for fixt $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that

$$|Tf_n(x) - Tf_n(y)| \le M \int_0^{2\pi} |\sin(x-t) - \sin(y-t)|\,dt < \epsilon$$

   provided $|x - y| < \delta$.

   (b): Since every operator on a Hilbert space with finitedimensional range is compact and

$$\mathcal{R}(T) = \mathrm{Span}\{\sin x, \cos x\}$$

   we obtain that T is compact.

2. Consider the BVP

$$\begin{cases} Lu \equiv u''(x) - u(x) = -\lambda \sin(u(x^2)), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0,\ u \in C^2([0, 1]) \end{cases} \qquad (*)$$

   Calculation of the Green's function:

$$g(x, t) = (a_1(t)e^x + a_2(t)e^{-x})\theta(x - t) + b_1(t)e^x + b_2(t)e^{-x}$$

   where

$$\begin{cases} a_1(t)e^t + a_2(t)e^{-t} = 0 \\ a_1(t)e^t - a_2(t)e^{-t} = 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \\ a_2(t) = -\frac{1}{2}e^t \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} b_1(t)+b_2(t)=0 \\ \sinh(1-t)+eb_1(t)+e^{-1}b_2(t)=0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} b_1(t)=-\frac{e\sinh(1-t)}{e^2-1} \\ b_2(t)=\frac{e\sinh(1-t)}{e^2-1} \end{cases}$$

Hence we have $g(x,t)=\sinh(x-t)\theta(x-t)-\frac{2e}{e^2-1}\sinh(1-t)\sinh x$.

Now set

$$T : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),$$

where $Tu(x) = \int_0^1 g(x,t)(-\lambda\sin(u(t^2)))\,dt$. From Banach's fixed point theorem we conclude that $(*)$ has a unique solution if T is a contraction. For $u,v\in C([0,1])$ we have

$$|Tu(x)-Tv(x)| = |\lambda|\,|\int_0^1 g(x,t)(\sin(u(t^2))-\sin(v(t^2)))\,dt| \leq$$
$$\leq |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\,\|u-v\|_\infty.$$

Hence T is a contraction for $|\lambda| < \frac{1}{\max_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |g(x,t)|\,dt}$ and the desired conclusion follows. (Calculations giving an estimate for λ_0 omitted here)

3. For $n=1,2,3,\ldots$ we have $f_n=e_{n+1}-e_n$, where $(e_n)_{n=1}^\infty$ is an ON-basis for the Hilbert space H. Assume that $\mathrm{Span}\{f_n : n=1,2,3,\ldots\}$ is not dense in H. Set $S=\overline{\mathrm{Span}\{f_n : n=1,2,3,\ldots\}}$. Then S is a closed proper subspace of H. Let $0\neq x\in S^\perp$. Here

$$0=\langle x,f_n\rangle = \langle x,e_{n+1}\rangle-\langle x,e_n\rangle,$$

i.e.

$$\langle x,e_{n+1}\rangle = \langle x,e_n\rangle,\ \ n=1,2,3,\ldots$$

But $(e_n)_{n=1}^\infty$ is an ON-basis and so

$$x=\Sigma_{n=1}^\infty\langle x,e_n\rangle e_n$$

where

$$\Sigma_{n=1}^\infty|\langle x,e_n\rangle|^2<\infty$$

by Bessel's inequality. This implies that $\langle x,e_n\rangle=0$ for all n and $x=0$. This gives a contradiction. Hence $S=H$ and the conclusion follows.

4. See textbook

5. See textbook

6. Let $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ be an inner product space with the Riesz property. Assume that $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ is not a Hilbert space. Let $\|\cdot\|$ denote the norm on E given by $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle},\ x\in E$. Then $(E,\|\cdot\|)$ is not a Banach space. Let $(\tilde{E},|||\cdot|||)$

denote a completion of $(E, \|\cdot\|)$. Here E is dense in $\tilde{E}$. Note that $\|\cdot\|$ satisfies the parallellogram law and that

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{1}{4i}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

for all $x, y \in E$. Then $|||\cdot|||$ satisfies the parallellogram law by continuity and so

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \frac{1}{4}(|||x+y|||^2 - |||x-y|||^2) + \frac{1}{4i}(|||x+iy|||^2 - |||x-iy|||^2)$$

defines an inner product on $\tilde{E}$ that coincides with $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on E. Now $(\tilde{E}, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ is a Hilbert space and by Riesz representation theorem has the Riesz property. Fix $\tilde{x} \in \tilde{E} \setminus E$ and define

$$f(x) = \langle\langle x, \tilde{x}\rangle\rangle,\ x \in E.$$

Then f defines a bounded linear functional on E. Note that $|f(x)| \leq |||\tilde{x}|||\cdot\|x\|$ for $x \in E$. By the Riesz property for E there exists a $\bar{x} \in E$ such that $f(x) = \langle x, \bar{x}\rangle$ for all $x \in E$. Hence

$$\langle\langle x, \tilde{x} - \bar{x}\rangle\rangle = 0, \quad x \in E.$$

But E is dense in $\tilde{E}$ so $\tilde{x} - \bar{x} = 0$. This gives $\tilde{x} = \bar{x}$ which yields a contradiction. Hence $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ is a Hilbert space.

Lösningsförslag till TMA401/MAN670 2005-05-25

1. Consider the BVP

$$\begin{cases} Lu \equiv u''(x) + u(x) = -\lambda\cos(1+u(x)), & x \in [0,1] \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u \in C^2([0,1]) \end{cases} \qquad (*)$$

Calculation of the Green's function:

$$g(x,t) = (a_1(t)\cos x + a_2(t)\sin x)\theta(x-t) + b_1(t)\cos x + b_2(t)\sin x$$

where

$$\begin{cases} a_1(t)\cos t + a_2(t)\sin t = 0 \\ -a_1(t)\sin t + a_2(t)\cos t = 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a_1(t) = -\sin t \\ a_2(t) = \cos t \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = 0 \end{cases}$$

Hence we have $g(x,t) = \sin(x-t)\theta(x-t)$.

Now set

$$T : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),$$

where $Tu(x) = \int_0^1 g(x,t)(-\lambda\cos(1+u(t)))\,dt$. From Banach's fixed point theorem we conclude that $(*)$ has a unique solution if T is a contraction. For $u, v \in C([0,1])$ we have

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\lambda|\,|\int_0^1 g(x,t)(\cos(1+u(t)) - \cos(1+v(t)))\,dt| \le$$
$$\le |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\,\|u-v\|_\infty = |\lambda| \int_0^x \sin(x-t)\,dt\,\|u-v\|_\infty \le$$
$$\le |\lambda|\,(1-\cos 1)\,\|u-v\|_\infty.$$

Hence T is a contraction for $|\lambda| < \frac{1}{1-\cos 1}$ and the desired conclusion follows.

2. $(e_n)_{n=1}^\infty$ is an ON-basis in a Hilbert space H and T is defined by

$$T(\Sigma_{n=1}^\infty a_n e_n) = \Sigma_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1} a_{n+1} e_n$$

for $(a_n)_{n=1}^\infty \in l^2$. Clearly $T \in \mathcal{B}(H,H)$ with $\|T\| = \frac{1}{2}$. An easy calculation gives

$$T^*(\Sigma_{n=1}^\infty b_n e_n) = \Sigma_{n=2} \frac{1}{n} b_{n-1} e_n.$$

T is a compact operator since $\|T - T_M\| \to 0$ as $M \to \infty$ where T_M, $M = 1, 2, \ldots$, are finite dimensional operators defined by

$$T_M(\Sigma_{n=1}^\infty a_n e_n) = \Sigma_{n=1}^M \frac{1}{n+1} a_{n+1} e_n.$$

More precisely we have $\|T - T_M\| < \frac{1}{M}$, $M = 1, 2, \ldots$.
Moreover λ is an eigenvalue for T iff there exists an (eigen)vector $\mathbf{0} \neq \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ such that $T(\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \lambda \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, i.e.

$$\lambda a_n = \frac{1}{n+1} a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

This implies that only $\lambda = 0$ is an eigenvalue for T (with eigenvector e_1).
Finally μ is an eigenvalue for T^* iff there exists an (eigen)vector $\mathbf{0} \neq \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ such that $T^*(\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n e_n) = \mu \Sigma_{n=1}^{\infty} b_n e_n$. This means that

$$b_1 = 0, \; \mu b_n = \frac{1}{n} b_{n-1}, \; n = 2, 3, \ldots$$

Hence T^* has no eigenvalues. This gives $\sigma_p(T) = \{0\}$ and $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.

3. Riesz representation theorem implies that there are uniquely defined $y_k \in H$, $k = 1, 2, \ldots, n$, such that

$$f_k(x) = \langle x, y_k \rangle \;\text{ all } x \in H,$$

where H is a Hilbert space. Moreover the fact that $f_1, f_2, \ldots, f_n$ are linearly independent in $\mathcal{B}(H, \mathbb{C})$ implies that $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are linearly independent[1] in H (easy to show). Now for each $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ consider the set $Y_l = \{y_k : k \neq l\}^{\perp}$. We see that $f_l|_{Y_l} \neq \mathbf{0}$ since otherwise $f_l(x) = 0$ for all $x \in Y_l$. This would imply that

$$\{y_k : k \neq l\}^{\perp} \subset \{y_l\}^{\perp}$$

and hence

$$\text{Span}\{y_l\} \subset \text{Span}\{y_k : k \neq l\},$$

which contradicts the linearly independence of $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Finally, for each $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pick an $x_l \in Y_l$ such that $f_l(x_l) = 1$. These x_l:s will satisfy the properties stated in the problem.

4. See textbook

5. See textbook

6. Let H be a Hilbert space and let $T : H \to H$ be a linear mapping with the following property:

$$x_n \to x \text{ in } H \quad \Rightarrow \quad Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ in } H.$$

We should prove that T is bounded[2].

Assume that T is not bounded. Then there exists a sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n \to \mathbf{0}$ in H but $Tx_n \not\rightharpoonup T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ in H. Without loss of generality (easy to show) we may assume that

[1] $y_1, y_2, \ldots, y_n$ does not need to be pairwise orthogonal.
[2] This can be done using the closed graph theorem, see the lecture notes on spectral theory, but I have not discussed that theorem in class.

(a) $\|Tx_n\| = 1$ for $n = 1, 2, \ldots$,

(b) $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ for $n = 1, 2, \ldots$,

(c) $Tx_n \rightharpoonup \mathbf{0}$ in H.

Set $y_n = Tx_n$ for $n = 1, 2, \ldots$ and choose an increasing sequence $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ of integers as follows: Set $n_1 = 1$. For $l = 2, 3, \ldots$ let n_l have the property

$$\Sigma_{k=1}^{l-1} |\langle y_{n_k}, y_m \rangle| \leq \frac{1}{4} \text{ all } m \geq n_l.$$

The existence of $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ follows from the fact that $y_n \rightharpoonup \mathbf{0}$. This implies that

$$\|\Sigma_{l=1}^{M} y_{n_l}\|^2 = \Sigma_{l=1}^{M} \langle y_{n_l}, y_{n_l} \rangle + \Sigma_{k,l=1,k\neq l}^{M} \langle y_{n_k}, y_{n_l} \rangle \geq$$

$$\geq M - 2\Sigma_{1\leq k<l\leq M} |\langle y_{n_k}, y_{n_l} \rangle| = \Sigma_{l=1}^{M} (1 - 2\Sigma_{k=1}^{l-1} |\langle y_{n_k}, y_{n_l} \rangle|) \geq \frac{M}{2}.$$

Now $y_{n_k} = Tx_{n_k}$ and $\|x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Hence $\Sigma_{k=1}^{M} x_{n_k} \to \tilde{x}$ for some $\tilde{x} \in H$ but $T(\Sigma_{k=1}^{M} x_{n_k}) = \Sigma_{k=1}^{M} Tx_{n_k} \not\rightharpoonup T\tilde{x}$ since[3] $\|\Sigma_{k=1}^{M} Tx_{n_k}\|^2 \geq \frac{M}{2} \to \infty$ as $M \to \infty$. Contradiction! Hence T is bounded.

[3] Every weakly convergent sequence is bounded

1. Consider the BVP

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{1+u^4(x)}), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0, \ u \in^2 ([a,1]) \end{cases} \qquad (*)$$

Step 1: Calculate the Green's function $g(x,t)$ for $Lu = u''$, $u(0) = u(1) = 0$. Here

$$g(x,t) = (a_1(t)\cdot 1 + a_2(t)x)\theta(x-t) + b_1(t)\cdot 1 + b_2(t)x$$

where

$$\begin{cases} a_1(t) + a_2(t)t = 0 \\ a_2(t) = 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{matrix} a_1(t) = -t \\ a_2(t) = 1 \end{matrix}$$

and

$$\begin{cases} g(0,t) = 0, \ 0 < t < 1 \\ g(1,t) = 0, \ 0 < t < 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{matrix} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t-1 \end{matrix}$$

which yields

$$g(x,t) = \begin{cases} (t-1)x & 0 \le x < t \le 1 \\ (x-1)t & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$$

Step 2: Set

$$Tu(x) = \int_0^1 g(x,t)(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{1+u^4(t)})dt, \ u \in C([0,1]).$$

If $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ is a contraction, then $(*)$ has a unique solution. T is a contraction since for $u, v \in C([0,1])$,

$$|Tu(x) - Tv(x)| \le \frac{1}{5}\int_0^1 |g(x,t)|\,|\frac{1}{1+u^4(t)} - \frac{1}{1+v^4(t)}|dt \le$$

$$\le \{\text{mean value thm }\}| \le \ldots \le \frac{4}{5}\int_0^1 |g(x,t)|dt\|u-v\|_\infty \le$$

$$\le \frac{4}{10}\|u-v\|_\infty.$$

Hence $\|Tu - Tv\|_\infty \le \frac{4}{10}\|u-v\|_\infty$ and so T is a contraction. The Banach fixed point theorem yields the result.

2. $(e_n)_{n=1}^\infty$ ON-basis on H implies $(f_k)_{k=-\infty}^\infty$ is an ON-basis on H where

$$f_0 = e_1, \ f_k = e_{2k+1}, \ k = 1,2,\ldots, \ f_k = e_{2k}, \ k = 1,2,\ldots,$$

so every $x \in H$ has a unique representation $\sum_{k=-\infty}^\infty a_k f_k$, where $\sum_{k=-\infty}^\infty |a_k|^2 < \infty$ (more precisely $a_k = \langle x, f_k\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$).

Clearly, S is well-defined and

$$\|S(\sum_{k=-\infty}^\infty a_k f_k)\|^2 = \|\sum_{k=-\infty}^\infty a_k f_{k+1}\|^2 = \sum_{k=-\infty}^\infty |a_k|^2$$

$$\|\sum_{k=-\infty}^\infty a_k f_k\|^2 = \sum_{k-\infty}^\infty |a_k|^2$$

by Parseval's formula. Hence S is an isometry and $\|S\| = 1$. S has no eigenvalues since if

$$\lambda = 0 \text{ then } a_k = 0 \text{ all } k$$

$$\lambda \neq 0 \text{ then } a_k = \lambda a_{k+1} \text{ all } k \text{ and hence } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$$

unless $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 0$.

3. $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ is a sequence in H, where $\|e_k\| = 1$ for all k. We want to show that

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 (1 + (\sum_{k\neq\ell} |\langle e_k, e_\ell\rangle|^2)^{1/2}).$$

Note that

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_k \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} = \langle x, \Sigma_k \langle x, e_k\rangle e_k\rangle \leq$$
$$\leq \|x\| \cdot \|\Sigma_k \langle x, e_k\rangle e_k\|.$$

Moreover

$$\begin{aligned}
\|\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 &= \sum_{k,\ell} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_\ell\rangle} \langle e_k, e_\ell\rangle \leq \\
&\leq \sum_{k,\ell} |\langle x, e_k\rangle||\langle x, e_\ell\rangle||\langle e_k, e_\ell\rangle| = \\
&= \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k\neq\ell} (|\langle x, e_k\rangle||\langle x, e_\ell\rangle|)|\langle e_k, e_\ell\rangle| \leq \\
&\leq \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 + (\sum_{k\neq\ell} (|\langle x, e_k\rangle|^2 \cdot |\langle x, e_\ell\rangle|^2)^{1/2} \times \\
&\quad \times (\sum_{k\neq\ell} |\langle e_k, e_\ell\rangle|^2)^{1/2} \leq \\
&\leq \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 + (\sum_{k,\ell} |\langle x, e_k\rangle|^2 |\langle x, e_\ell\rangle|^2)^{1/2} \times \\
&\quad \times (\sum_{k\neq\ell} |\langle e_k, e_\ell\rangle|^2)^{1/2} = \\
&= \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 (1 + (\sum_{k\neq\ell} |\langle e_k, e_\ell\rangle|^2)^{1/2}).
\end{aligned}$$

This yields the result.

4. 5.and 6. Theory from book (and lectures).

1. Consider the BVP

$$\begin{cases} Lu = u''(x) - u(x) = -\frac{1}{2}(1+u(x^2)), & x \in [0,1] \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u \in C^2([0,1]) \end{cases} \qquad (*)$$

Calculation of Green's function

$$g(x,t) = (a_1(t)e^x + a_2(t)e^{-x})\theta(x-t) + b_1(t)e^x + b_2(t)e^{-x}$$

where

$$\begin{cases} a_1(t)e^t + a_2(t)e^{-t} = 0 \\ a_1(t)e^t - a_2(t)e^{-t} = 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{l} a_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \\ a_2(t) = -\frac{1}{2}e^{t} \end{array}$$

and

$$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ b_1(t) - b_2(t) = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{l} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = 0 \end{array}$$

Hence we have $g(x,t) = \sinh(x-t)\theta(x-t)$.

Now set

$$T : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),$$

where $Tu(x) = \int_0^1 g(x,t)(-\frac{1}{2}(1+u(t^2)))dt$. From Banach's fixed point theorem we conclude that $(*)$ has a unique solution if T is a contraction. For $u, v \in C([0,1])$ we have

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\int_0^1 g(x,t)\frac{1}{2}(u(t^2) - v(t^2))dt| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |g(x,t)|dt\|u-v\|_\infty = \frac{1}{2}(\cosh k - 1)\|u-v\|_\infty \leq$$
$$\leq \underbrace{\frac{1}{4}(e + \frac{1}{e} - 2)}_{<1}\|u-v\|_\infty.$$

Here T is a contraction and the statement follows.

2. Set, for $f \in L^2([a,b]), Tf(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\ x \in [a,b]$.

   $Tf \in L^2([a,b])$ since

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_a^b (\frac{1}{b-a}|\int_a^b f(x)\,dx|)^2 dt =$$
$$= (\frac{1}{b-a})^2 \int_a^b |\int_a^b f(x)dx|^2 dt \leq \{\text{Hölder}\} \leq$$
$$\leq (\frac{1}{b-a})^2 \int_a^b (b-a)\int_a^b |f(x)|^2 dx dt = \int_a^b |f(x)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2.$$

   T linear: easy to show.

   T bounded: see above. In particular we get $\|T\| \leq 1$.

   To show that T is an orthogonal projection it suffices to show that $T^2 = T$ and $T^* = T$.

(a) Take $f \in L^2([a,b])$. Then

$$(T^2 f)(x) = T(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dtds =$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = (Tf)(x), \quad \text{all} \quad x \in [a,b].$$

Hence $T^2 = T$.

(b) Take $f, g \in L^2([a,b])$. We obtain

$$\langle Tf, g\rangle = \int_a^b \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \overline{g(t)}dt =$$
$$= \int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{g(t)}dtdx =$$
$$= \int_a^b f(x)\,\overline{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt}dx = \langle f, Tg\rangle$$

Hence $T^* = T$.

The statement is proved.

3. Let $h \in C([0,1]\times[0,1])$ be real-valued and

$$h(x,y) = h(y,x) > 0 \quad \text{all} \quad x,y \in [0,1]. \qquad (*)$$

Set $Tf(x) = \int_0^1 h(x,y)f(y)dy$, $x \in [0,1]$, for $f \in L^2([0,1])$. We want to show that T has an eigenvalue $\lambda = \|T\|$ whitch is simple. (All eigenvalues λ satisfy $|\lambda| \leq \|T\|$). Since the kernel is continuous and satisfies $(*)$ we see that T is a compact, self-adjoint operator or $L^2([0,1])$ and hence has an eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$ with $|\lambda| = \|T\|$. Since $h > 0$ we see that $\lambda = \|T\|$ (see first and second observation below). It remains to prove that this eigenvalue is simple.

First observation: f eigenfunction for $\lambda \Rightarrow f \in C([0,1])$ which follows from Lebesgues dominated convergence. Then
Second observation: f eigenfunction for $\lambda \Rightarrow f$ has constant sign, say $f \geq 0$, since if f changes sign, then

$$\lambda\|f\| = \|T\|\|f\| = \|Tf\| < \|T|f|\| \leq \|T\|\,\||f|\| = \|T\|\,\|f\|.$$

Moreover we can conclude that $f > 0$ since $h > 0$.

Third observation: f_1, f_2 eigenfunction for $\lambda \Rightarrow f_1 = \alpha f_2$ for some $\alpha \neq 0$.

To see this assume that it is false and set

$$s(\alpha) = |\{x \in [0,1] : f_1(x) - \alpha f_2(x) \geq 0\}|,\ \alpha \geq 0,$$

where $|E|$ denotes the measure of the set E. Here $s(0) = 1$, $s(\alpha)$ decreasing and $\lim_{a\to+\infty} s(\alpha) = 0$. Also $s(\alpha) = 1$ for $\alpha \in [0, \tilde{\alpha}]$ for some $\tilde{\alpha} > 0$ since

$f_1, f_2 \in C([0,1])$ and $f_1, f_2 > 0$ on $[0,1]$. Then there exists $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ such that $1 > s(\alpha_0) \geq s(\alpha_1) > 0$. [*)]

This means that

$$\begin{array}{ll} f_1(x) < \alpha_0 f_1(x) & \text{on a set of positive measure} \\ f_1(x) \geq \alpha_0 f_2(x) & \text{on a set of positive measure} \end{array}$$

but since also

$$f_1(x) \geq \alpha_1 f_2(x) \qquad \text{on a set of positive measure,}$$

together with $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ and $f_2 > 0$ we see that

$$f_1(x) > \alpha_0 f_2(x) \qquad \text{on a set of positive measure.}$$

Then $f = f_1 - \alpha_0 f_2$ is an eigenfunction for λ (note that $f \neq 0$) that changes sign. Contradiciton!

The statement follows.

[*)] It cannot happen that $\exists \beta > 0$ sth.

$$\left\{ \begin{array}{lll} s(\alpha) = 1 & \text{for} & \alpha < \beta \\ s(\alpha) = 0 & \text{for} & \alpha > \beta \end{array} \right. \qquad \text{easy to see.}$$

and if there exists a $\beta > 0$ sth

$$\begin{array}{lll} s(\alpha) = 1 & \text{for} & \alpha \leq \beta \\ s(\alpha) = 0 & \text{for} & \alpha > \beta \end{array}$$

then $f_1 = \beta f_2$.

Lösningsskisser till tentamen i TMA401/MAN670, 2004-01-12

1. We will prove that

$$\begin{cases} u''(x)+u(x)=\frac{u(x)}{2+u^2(x)}, 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ u(0)=u(\frac{\pi}{2})=0, u\in C^2([0,\frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

has a unique solution.

   1. Determine the Green's function for $\begin{cases} u''+u=F \\ u(0)=m(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$:
      Set $e(x,t)=a_1(t)\cos x+a_2(t)\sin x$, where $e(t,t)=0$ and $e'_x(t,t)=1$. This gives $e(x,t)=\sin(x-t)$. The Green's function takes the form

      $$g(x,t)=\sin(x-t)\theta(x-t)+b_1(t)\cos x+b_2(t)\sin x.$$

      Here $g(0,t)=g(\frac{\pi}{2},t)=0$ for $0<t<\frac{\pi}{2}$ implies that

      $$\begin{aligned} g(x,t) &= \sin(x-t)\theta(x-t)-\sin x\cos t= \\ &= \begin{cases} -\cos x\sin y, & x>t \\ -\sin x\cos t, & x<t \end{cases} \end{aligned}$$

      We see that $g(x,t)\le 0$ for all $x,t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.
   2. Set

      $$\begin{cases} (Tu)(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,t)\frac{u(t)}{2+u^2(t)}dt, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ u\in C([0,\frac{\pi}{2}]) \end{cases}$$

      The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point.
      For $u,v\in C([0,\frac{\pi}{2}])$ we get

      $$\begin{aligned} &|(Tu)(x)-(Tv)(x)|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(,t)||\frac{u(t)}{2+u^2(t)}-\frac{v(t)}{2+v^2(t)}|dt\le \\ &\le\{\text{mean value theorem}\}\le \\ &\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(x,t)|dt\|u-v\|_\infty\le\frac{\pi}{4}\|u-v\|_\infty \end{aligned}$$

      This shows that T is a contraction on the space $C([0,\frac{\pi}{2}])$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

2. Set $Tf(x)=\int_0^1(x+y)f(y)dy$ for $f\in L^2([0,1])$. T is bounded since

$$\begin{aligned} &\|Tf\|_{L^2}^2=\int_0^1|\int_0^1(x+y)f(y)dy|^2dx\le\{\text{Hölder}\}\le \\ &\le\int_0^1\int_0^1(x+y)^2dy\,\|f\|_{L^2}^2dx=\frac{7}{6}\|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

and hence $\|T\| \leq \sqrt{\frac{7}{6}}$.

To calculate $\|T\|$ we observet hat T is a compact, self-adjoint operator on the Hilbert space $L^2([0,1])$ and hence

$$\|T\| = \sup_{\lambda \text{ eigenvalue to } T} |\lambda|.$$

Note that $Tf(x) = \int_0^1 f(y)dy\, x + \int_0^1 yf(y)dy$ is a polynomial of degree ≤ 1 and hence λ is an eigenvalue to T with eigenfunction $ax+b$ if

$$\lambda(ax+b) = \int_0^1 (ay+b)dy\, x + \int_0^1 y(ay+b)dy,\ x \in [0.1].$$

i.e.,

$$\begin{cases} \lambda a = \frac{1}{2}a + b \\ \lambda b = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases}$$

This system has a non-trivial solution iff

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

We obtain the eigenvalues $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ and so $\|T\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. From problem 1 we can restate the problem as to show that the mapping,

$$Tu(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,t) \frac{u(t)}{2+u^2(t)} dt,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

for $u \in C([0,\frac{\pi}{2}])$, has a fixed point in $C([0,\frac{\pi}{2}])$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. For $|\lambda|$ large enough we cannot refer to the Banach's fixed point theorem since T is no longer a contraction. Instead we can use the Schander's fixed point theorem.

Fix a $\lambda \in \mathbb{R}$.

Note that $g(x,t)$ is a continuous function for $0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}$ and $f(u) \equiv \lambda \frac{u}{2+u^2}$ is a bounded function for $u \in \mathbb{R}$ (note that λ is fixed.)

We will choose a closed convex set $S \subset C([0,\frac{\pi}{2}])$ such that the mapping $T : S \to S$ is continuous and the image set $T(S)$ is relatively compact in $C([0,\frac{\pi}{2}])$.
Take $S = \{u \in C([0,\frac{\pi}{2}]) : \|u\| \leq D\}$, where D is to be chosen such that $T(S) \subset S$. Since g is continuous on the compact set $\{(x,y) : 0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}\}$ it is bounded on this set and so

$$\sup_{\substack{0 \leq x,t \leq \frac{\pi}{2} \\ u \in \mathbb{R}}} |g(x,t)f(u)| = E < \infty$$

which yields $|(Tu)(x)| \leq \frac{\pi}{2}E$ for all $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ and $u \in C([0,\frac{\pi}{2}])$. Hence $T(S) \subset S$ if $D = \frac{\pi}{2}E$.

Now it remains to prove that $T(S)$ is relatively compact in $C([0, \frac{\pi}{2}])$ and $TS \to S$ is continuous. The first statement follows from the Arzela-Aschi Theorem, since $T(S)$ is uniformly bounded and equicontinuous (the latter follows from the uniform continuity of g on $\{(x,t) : 0 \le x, t \le \frac{\pi}{2}\}$), and the second statement follows from the uniform continuity of $f(y)$ for $-D \le u \le D$ and the boundedness of g.

The existence of a fixed point for T now follows from Schander's fixed point theorem.

(Remark: As a matter of fact one trivially observes that $u = 0$ is a solution to the problem. However to treat the problem with the RHS in the differential equation replaced by the original one $+1$ is harder but the method above yields a solution.)

4. See textbook.

5. $T : X \to X$, where X is a real normal space, is continuous and satisfies

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in X. \tag{$*$}$$

We shall prove that

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \text{for all} \quad x \in X \text{ and } \lambda \in \mathbb{R} \tag{$**$}$$

It follows from $(*)$ that

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ since $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = 2T(\mathbf{0})$.
- $T(nx) = nT(x)$ for positive integrs n since

$$T(nx) = T(x + (n-1)x) = T(x) + T((n-1)x) = \ldots = nT(x)$$

- $T(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}T(x)$ for positive integers n since

$$T(x) = T(n(\frac{1}{n}x)) = nT(\frac{1}{n}x).$$

Combining these observations we see that $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ for all $x \in X$ and $\lambda \in \mathbb{Q}$. To prove $(**)$ we fix a $\lambda \in \mathbb{R}$ and an $x \in X$ and take a sequence $\lambda_n \in \mathbb{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, such that $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{R}$. This implies that $\lambda_n x \to \lambda x$ in X. It also implies $\lambda_n T(x) \to \lambda T(x)$ in X. Since T is continuous we conclude that $T(\lambda_n x) \to T(\lambda x)$ in X. But, $T(\lambda_n x) = \lambda_n T(x) \longrightarrow \lambda T(x)$ in X and so

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

The statement is proved.

6. Let $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ be an ON-basis in H and $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ an ON-sequence in H such that $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1$. We shall show that also $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ is an ON-basis.

Set $S = \overline{\text{span}\{y_n : n = 1, 2, \ldots\}}$. Then S is a closed subspace of H. It remains to prove that $S = H$.

Assume that $S \neq H$. Then $S^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$ and there is an $x \in S^{\perp}$ with $\|x\| > 0$. We have

$$\langle x, y_n \rangle = 0, n = 1, 2, \ldots$$

since $x \in S^{\perp}$. Parseval's formula yields

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle - \langle x, y_n \rangle|^2 =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n - y_n \rangle|^2 \leq \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2 \|x_n - y_n\|^2 < \|x\|^2.$$

This yields a contradiciton and hence $S = H$.

Kortfattade lösningsskisser till tentamen i TMA401/MAN670, 2003-08-30

Problem 1

We will prove that

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = \lambda \frac{u(x)}{1+u^2(x)}, \quad x \in (0,1) \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

has a unique solution for $|\lambda|$ small enough.

1. Determine the Green's function $g(x,t)$ for
$$\begin{cases} u'' - u = F & x \in (0,1) \\ u(0) - u'(0) + u(1) = u(0) + u'(0) + 2u'(1) = 0 \end{cases}$$
Set .... (standard calculation) ....

2. Set
$$\begin{cases} (Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t) \cdot \lambda \frac{u(t)}{1+u^2(t)}\, dt, \quad 0 \le x \le 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$
The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point. For $u, v \in C[0,1]$ we obtain
$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \le \text{......(standard calculations).....} \le C(\lambda)\|u - v\|_\infty.$$
This shows that T is a contraction on the Banach space $C[0,1]$ provided $C(\lambda) < 1$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

Problem 2

The solution is a straight forward application of the Gram-Schmidt process and we only refer to the textbook for more information.

Problem 3

We have to show that the ON-sequence $(u_n)_{n=1}^\infty$ in $L^2([0,1])$ is complete if

$$\sum_{n=1}^\infty \left| \int_0^x u_n(t)dt \right|^2 = x \text{ for all } x \in [0,1] \tag{1}$$

Formula (1) can be reformulated as

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2 = \|\chi_{[0,x]}\|^2 \text{ for all } x \in [0,1],$$

where

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & t \in I \\ 0 & t \notin I \end{cases},$$

since

$$\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle = \int_0^1 \chi_{[0,x]}(t)\overline{u_n(t)}dt = \overline{\int_0^x u_n(t)dt}$$

and

$$\|\chi_{[0,x]}\|^2 = \int_0^1 |\chi_{[0,x]}(t)|^2 dt = \int_0^x dt = x.$$

To show that $(u_n)_{n=1}^\infty$ is complete it is enough to show that

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle f, u_n \rangle|^2 = \|f\|^2 \text{ for all } f \in L^2([0,1]). \tag{2}$$

Here it suffices to show that (2) is true for a dense set A in $L^2([0,1])$, since if $f_k \to f$ in L^2 and (2) is true for $f_k, k = 1, 2, \ldots$, then we have

$$\begin{aligned}
&0 \le \|f\|^2 - \sum_{n=1}^\infty |\langle f, u_n \rangle|^2 = \\
&= \|(f - f_k) + f_k\|^2 - \sum_{n=1}^\infty |\langle (f - f_k) + f_k, u_n \rangle|^2 \le \\
&\le \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f_k\|^2 - \\
&- \sum_{n=1}^\infty (\langle f - f_k, u_n \rangle + \langle f_k, u_n \rangle)\overline{(\langle f - f_k, u_n \rangle + \langle f_k, u_n \rangle)} = \\
&= \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\|^2 + \sum_{n=1}^\infty |\langle f_k, u_n \rangle|^2 - \\
&- \sum_{n=1}^\infty (|\langle f - f_k, u_n \rangle|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f - f_k, u_n \rangle \overline{\langle f_k, u_n \rangle} + \\
&+ |\langle f_k, u_n \rangle|^2) \le \\
&\le \|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f - f_k\|^2 + \\
&+ \sum_{n=1}^\infty |\langle f - f_k, u_n \rangle| \cdot |\langle f_k, u_n \rangle| \le \\
&\le 2\|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \\
&+ (\sum_{n=1}^\infty |\langle f - f_k, u_n \rangle|^2)^{1/2} (\sum_{n=1}^\infty |\langle f_k, u_n \rangle|^2) \le \\
&\le 2\|f - f_k\|^2 + 2\|f_k\| \cdot \|f - f_k\| + \|f - f_k\| \|f_k\| \to 0
\end{aligned}$$

as $k \to \infty$. Here we have used that $\sup_k \|f_k\| < \infty$, which follows from $f_k \to f$ in L^2, and repeatedly applied Bessel's inequality.

Now we take A to be the set of all finite linear combinations of χ_I, where the I:s are subintervals of $[0,1]$. Then A is dense in $L^2([0,1])$. Set $g = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{I_k}$ where the intervals I_k are pairwise disjoint subintervals of $[0,1]$ and $a_k \in \mathbb{C}$.

We know that (2) is valid for $f = \chi_{[0,x]}$. It remains to show that:

- $f = \chi_{[y,x]}$ satisfies (2)
- f, g satisfies (2) and have disjoint support implies that any linear combination of f, g satisfies (2).

Fix $0 < y < x \leq 1$. We note that

$$\|\chi_{[0,x]}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2$$
$$\|\chi_{[0,y]}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2. \tag{3}$$

This yields

$$\|\chi_{[y,x]}\|^2 = x - y$$

and

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[y,x]}, u_n \rangle|^2 = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]} - \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle - \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle|^2 - \\
&- 2\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,x]}, u_n \rangle \overline{\langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle} = \\
&= x + y - 2\mathrm{Re} \langle \chi_{[0,x]}, \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle u_n \rangle = (!) = \\
&= x + y - 2\mathrm{Re} \langle \chi_{[0,x]}, \chi_{[0,y]} \rangle = x + y - 2\|\chi_{[0,y]}\|^2 = x - y.
\end{aligned}$$

Note that at (!) we have used the fact

$$\chi_{[0,y]} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \chi_{[0,y]}, u_n \rangle u_n$$

which follows from (3).

We have thus found that $\chi_{[y,x]}$ satisfies (2). To prove the second statement we have to do similar calculations (do it yourself!!!) and the full statement that $g \in A$ implies g satisfies (2) follows by induction over N (see the expression for g above).

Problem 4 & 5 & 6

See the textbook

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2003-05-31

Problem 1

We will prove that

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = \arctan u(x^2), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

has a unique solution.

1. Determine the Green's function for $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$:

   Set $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ where $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. This gives $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. The Green's function takes the form

   $$g(x,t) = \theta(x-t)(1 - e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

   Here $g(0,t) = g(1,t) = 0$, $0 < t < 1$ implies

   $$\begin{cases} b_1(t) = \frac{e^t - 1}{e-1} \\ b_2(t) = -\frac{e^t - 1}{e-1}, \end{cases}$$

   Hence $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t-1}{e-1}(1-e^{-x})$. We see (a simple calculation) that $g(x,t) \le 0$ for all x, t.

2. Set

   $$\begin{cases} (Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t) \arctan u(t^2)\,dt, & 0 \le x \le 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

   The boundary value problem has a unique solution iff T has a unique fixed point. For $u, v \in C[0,1]$ we obtain

   $$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \int_0^1 |g(x,t)||\arctan u(t^2) - \arctan v(t^2)|\,dt \le \\ &\le \{\text{mean value theorem}\} \le \\ &\le \int_0^1 |g(x,t)||u(t^2) - v(t^2)|\,dt \le \\ &\le \int_0^1 (-g(x,t))\,dt \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

   Vi note that (small calculation)

   $$\int_0^1 (-g(x,t)\,dt = \max_{0 \le x \le 1} (-x + \frac{e}{e-1}(1 - e^{-x}) \equiv c < 1$$

and hence

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq c\|u - v\|_\infty.$$

This shows that T is a contraction on the Banach space $C[0,1]$ and the conclusion follows from Banach's fixed point theorem.

Problem 2

Let T, H, $(e_n)_{n=1}^\infty$ and $(f_n)_{n=1}^\infty$ be as in the formulation of the problem. We note that since $(e_n)_{n=1}^\infty$ is an ON-basis for H we have

$$f_n = \Sigma_{k=1}^\infty \langle f_n, e_k\rangle e_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

and since T is continuous we get

$$Tf_n = \Sigma_{k=1}^\infty \langle f_n, e_k\rangle Te_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

This yields

$$\Sigma_{n=1}^\infty \|Tf_n\|^2 = \Sigma_{n=1}^\infty \Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{l=1}^\infty \langle f_n, e_k\rangle \langle Te_k, Te_l\rangle \overline{\langle f_n, e_l\rangle}.$$

and since the series is absolutely convergent we can change the order of summation. Observing that

$$\Sigma_{n=1}^\infty \langle f_n, e_k\rangle \overline{\langle f_n, e_l\rangle} = \langle \Sigma_{n=1}^\infty \langle e_l, f_n\rangle f_n, e_k\rangle = \langle e_l, e_k\rangle$$

we have

$$\Sigma_{n=1}^\infty \|Tf_n\|^2 = \Sigma_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2.$$

Moreover $x = \Sigma_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle e_n$ implies $Tx = \Sigma_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle Te_n$ and

$$\|Tx\| = \|\Sigma_{n=1}^\infty \langle x, e_n\rangle Te_n\| \leq \Sigma_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle| \|Te_n\| \leq$$

$$\leq (\Sigma_{n=1}^\infty |\langle x, e_n\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} (\Sigma_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\| (\Sigma_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

by Parseval's formula. Hence we get

$$\|T\|^2 \leq \Sigma_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2.$$

Problem 3 Let

$$Mf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x > 0$$

for $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. We observe that $Mf(x) \in \mathbb{R}$ for $x > 0$. Moreover for every continuous function f with compact support in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ we note that

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2}(\int_0^t |f(s)|\,ds)^2\,dt < \infty$$

and that

$$\|Mf\|^2 \leq \int_0^\infty \frac{1}{t^2}(\int_0^t |f(s)|\,ds)^2\,dt = [-\frac{1}{t}(\int_0^t |f(s)|\,ds)^2]_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|\,ds\, f(t)\,dt \leq$$

$$\leq 0 + 2(\int_0^\infty \frac{1}{t^2}(\int_0^t |f(s)|\, ds)^2)^{\frac{1}{2}}(\int_0^\infty |f(s)|^2\, ds)^{\frac{1}{2}},$$

i.e. we get

$$\|Mf\| \leq 2\|f\|.$$

Now we recall that the set of continuous functions with compact support in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ is dense in $L^2(\mathbb{R}_+)$ and from the inequality above we get that $Mf \in L^2$ for every $f \in L^2$ and that $\|M\| \leq 2$, and in particular that M is bounded. A straight-forward calculation show that

$$M^*f(x) = \int_x^\infty \frac{1}{t} f(t)\, dt, \quad x > 0$$

and that

$$\|(I - M)f\|^2 = \|f\|^2$$

for all $f \in L^2$. From this it follows that

$$\|I - M\| = 1.$$

Problem 4 & 5

See the textbook

Problem 6 We want to show that there exists a $C > 0$ such that for every $y \in \mathcal{R}(I + T)$ there exists a $x \in X$ with $(I + T)x = y$ satisfying

$$\|x\| \leq C\|y\|.$$

First we fix a $y \in \mathcal{R}(I + T)$ and set

$$d(y) = \inf\{\|x\| : (I + T)x = y\}.$$

Claim: There exists an $\tilde{x} \in X$ with $(I + T)\tilde{x} = y$ such that $\|\tilde{x}\| = d(y)$. To see this take a sequence $(x_n)_{n=1}^\infty$ with $(I + T)x_n = y$ such that $\|x_n\| \to d(y)$. Since this sequence is bounded there is a converging subsequence of $(Tx_n)_{n=1}^\infty$, let this still be denoted by $(Tx_n)_{n=1}^\infty$, converging to say $z \in X$. Here we used the fact that T is compact. But then $x_n \to y - z$ in X and hence $\tilde{x} = y - z$ has the desired property.

Now assume that there is no $C > 0$ with the property above. Then there are sequences $(x_n)_{n=1}^\infty$ and $(y_n)_{n=1}^\infty$ satisfying $(I + T)x_n = y_n$ such that

$$\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \to \infty.$$

Since T is linear we can without loss of generality assume that $\|\tilde{x}_n\| = 1$ for all n. Since T is compact there exists a converging subsequence of $(T\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty$, call it still $(T\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty$, converging to say v in X. We also have

$$\tilde{x}_n \to -v \quad \text{in} \quad X.$$

But since $\|y_n\| \to 0$ in X ($\|\tilde{x}_n\| = 1$ for all n) and since T is continuous (T is compact linear) we obtain $v = -Tv$. By the definition of $\tilde{x}_n$ this yields a contradiction since $(I + T)(\tilde{x}_n - v) = y_n$ and

$$\|\tilde{x}_n - v\| \geq \|\tilde{x}_n\| = 1$$

is valid for every n. The conclusion in problem 6 follows.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-08-21

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatorn A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \overline{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$A^*Af(x) = \int_0^1 (y-x)Af(y)\,dy = \int_0^1 (y-x)(\int_0^1 (y-z)f(z)\,dz)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (y-x)(y-z)\,dy)f(z)\,dz = \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz)f(z)\,dz,$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatorn ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax+b), \quad \text{alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x - t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t - 1, \ 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = -\displaystyle\int_0^1 g(x,t)(2 + \frac{1}{1+u^2(x)})\,dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \int_0^1 |g(x,t)||\frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)}|\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\,dt \|u-v\|_\infty.$$

Vi noterar att $|\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}| \leq \frac{1}{2}|\frac{2a}{1+a^2}| + \frac{1}{2}|\frac{2b}{1+b^2}| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x,t)|\,dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2}(1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u-v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0,1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle = \Sigma_i \lambda_i |\langle x, e_i\rangle|^2$$

där $\lambda_i \geq 0$, e_i, $i = 1, 2, \ldots$, betecknar egenvärdena respektive motsvarande normerade egenvektorer till operatorn T. Låt n vara ett fixerat positivt heltal > 1 (om $n = 1$ är påståendet trivialt sant). Hölders olikhet med exponenterna n och n^*, där $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^*}$, tillsammans med Hilbert-Schmidts sats ger

$$0 \leq \langle Tx, x\rangle \leq (\Sigma_i \lambda_i^n |\langle x, e_i\rangle|^{\frac{2}{n}n})^{1/n} \cdot (\Sigma_i |\langle x, e_i\rangle|^{(2-\frac{2}{n})n^*})^{1/n^*} = \langle T^n x, x\rangle^{1/n} \cdot \|x\|^{2(n-1)/n}.$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA401/MAN670, 2002-06-01

Uppgift 1

Givet

$$Af(x) = \int_0^1 (x-y)f(y)\,dy, \quad 0 \le x \le 1,$$

dvs. A är en integraloperator på Hilbertrummet $L^2([0,1])$ med kärnan $k(x,y) = x-y$. Den adjungerade operatorn A^* är då också en integraloperator men med kärnan $k^*(x,y) = \overline{y-x} = y-x$. Vi får för $f \in L^2([0,1])$ att

$$A^*Af(x) = \int_0^1 (y-x)Af(y)\,dy = \int_0^1 (y-x)(\int_0^1 (y-z)f(z)\,dz)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (y-x)(y-z)\,dy)f(z)\,dz = \int_0^1 (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(x+z) + xz)f(z)\,dz,$$

där vi använt Fubinis sats.

För att beräkna $\|A\|$ noterar vi att A^*A är en självadjungerad kompakt operator och $\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$. Vidare gäller för en självadjungerad kompakt operator att dess norm är lika med det största reella tal som är absolutbeloppet av ett egenvärde till operatorn ifråga. Vi noterar att $A^*Af(x) = a(f)x + b(f)$ där $a(f), b(f)$ är reella tal som beror på $f \in L^2([0,1])$. Följdaktligen har egenfunktioner till A^*A formen $e(x) = ax + b$ varför vi ansätter

$$A^*Ae(x) = \lambda e(x), \quad e(x) = ax + b.$$

En liten kalkyl ger

$$\frac{a}{12}x + \frac{b}{12} = \lambda(ax+b), \ \text{ alla } x \in [0,1],$$

dvs det enda egenvärdet $\lambda \neq 0$ är $\frac{1}{12}$. Vi har alltså $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Uppgift 2

Vi ska visa att

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \frac{1}{1+u^2(x)}, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = x - t$. Greenfunktionen ges av

$$g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + b_1(t) + b_2(t) - x.$$

Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

$$\begin{cases} b_1(t) = 0 \\ b_2(t) = t - 1,\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(x-t) + (t-1)x$. Vi noterar att $g(x,t) \leq 0$ alla x, t.

2. Sätt

$$\begin{cases} (Tu)(x) = -\displaystyle\int_0^1 g(x,t)(2 + \frac{1}{1+u^2(x)})\, dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \int_0^1 |g(x,t)||\frac{1}{1+u^2(t)} - \frac{1}{1+v^2(t)}|\, dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{(u(t)+v(t))(u(t)-v(t))}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\, dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |g(x,t)||\frac{u(t)+v(t)}{(1+u^2(t))(1+v^2(t))}|\, dt \|u-v\|_\infty. \end{aligned}$$

Vi noterar att $|\frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)}| \leq \frac{1}{2}|\frac{2a}{1+a^2}| + \frac{1}{2}|\frac{2b}{1+b^2}| \leq 1$ för alla reella tal a, b samt att

$$\int_0^1 |g(x,t)|\, dt \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2}(1-x) = \frac{1}{8}$$

vilket ger

$$\|Tu - Tv\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|u - v\|_\infty.$$

Detta visar att T är en kontraktion på Banachrummet $C[0,1]$ och påståendet följer från Banach fixpunktssats.

Uppgift 3

Låt T vara en avbildning på ett normerat rum X som uppfyller följande villkor: Det finns ett reellt tal C och ett reellt tal $\alpha > 1$ sådana att

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha, \quad \text{alla } x, y \in X.$$

Vi ska visa att $T(x) = T(\mathbb{0})$ för alla $x \in X$.

Fixera ett godtyckligt $x \in X$. Sätt $\delta = \|T(x) - T(\mathbb{0})\|$. Fixera ett positivt heltal n och sätt $x_k = \frac{k}{n}x \in X$ för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Då gäller

$$\delta = \|T(x_n) - T(x_{n-1}) + T(x_{n-1}) - \ldots - T(x_0)\| \leq$$

$$\leq \Sigma_{k=0}^{n-1}\|T(x_{k+1}) - T(x_k)\| \leq C\Sigma_{k=0}^{n-1}\|x_{k+1} - x_k\|^\alpha =$$

$$= C\|x\|^\alpha \cdot n^{\alpha-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Detta medför att $\delta = 0$ och påstendet i uppgiften är visat.

Anm: Om $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller

$$|T(x) - T(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \text{ alla } x, y \in \mathbf{R}$$

så gäller att

$$\lim_{0 \neq h \to 0} |\frac{T(x + h) - T(x)}{h} - 0| = 0, \text{ alla } x \in \mathbf{R}$$

dvs. T är en deriverbar funktion med derivatan $= 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ och alltså är T en konstant funktion.

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en självadjungerad operator på ett Hilbertrum H för vilken T^n är kompakt för något heltal $n \geq 2$. Vi ska visa att T är kompakt.

Vi noterar att T självadjungerad innebär (per definition) att T är en begränsad operator. T är kompakt om vi kan visa att T^k kompakt implicerar att T^{k-1} är kompakt för godtyckligt heltal $k \geq 2$.

Antag nu att T^k är kompakt för fixt $k \geq 2$. Låt $(x_n)_{n=1}^\infty$ vara en begränsad följd i H, dvs det finns ett reellt tal M sådant att $\|x_n\| \leq M$ för alla n. Då T^k är kompakt finns det en delföljd (x_{p_n}) av (x_n) för vilken $(T^k x_{p_n})$ konvergerar i H. Då konvergerar också $(T^{k-1}x_{p_n})$ i H eftersom

$$\|T^{k-1}x_{p_n} - T^{k-1}x_{p_m}\|^2 = \langle T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^{k-1}(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle =$$

$$= \langle T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m}), T^k(x_{p_n} - x_{p_m})\rangle \leq$$

$$\leq \|T^{k-2}(x_{p_n} - x_{p_m})\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m}\| \leq$$

$$\leq \|T^{k-2}\| \cdot \|x_{p_n} - x_{p_m}\| \cdot \|T^k x_{p_n} - T^k p_{p_m}\| \leq$$

$$\leq \underbrace{2\|T\|^{k-2}M}_{<\infty} \cdot \underbrace{\|T^k x_{p_n} - T^k x_{p_m})\|}_{\to 0,\ n,m \to \infty}$$

och varje Cauchyföljd i ett Hilbertrum konvergerar. Detta medför att T^{k-1} är kompakt och påståendet i uppgiften är visat.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2001-05-30

1. A är integraloperator med kärnan $a(x,y) = e^{x+y}\cos(x+y)$, där $a \in C([0,\pi] \times [0,\pi])$ och $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$.

   a) Banachrummet $C[0,\pi]$: För $u \in C[0,\pi]$ gäller

   $$|Au(x)| \leq \int_0^\pi e^{x+y}|\cos(x+y)|dy\|u\|_\infty \equiv I(x)\|u\|_\infty, x \in [0,\pi],$$

   där $I \in C[0,\pi]$. Alltså $\|A\| \leq \max_{x\in[0,\pi]} I(x) = I(x_0)$ för något $x_0 \in [0,\pi]$. Vidare gäller $I(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} Au_n(x)$ där

   $$u_n(x) = \begin{cases} +1 \text{ då } \min(|x+x_0-\frac{\pi}{2}|, |x+x_0-\frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \,\&\, \cos(x+x_0) > 0 \\ \\ -1 \text{ då } \min(|x+x_0-\frac{\pi}{2}|, |x+x_0-\frac{3\pi}{2}|) > \frac{1}{n} \,\&\, \cos(x+x_0) < 0 \\ \\ \text{till beloppet} \leq 1 \text{ och kontinuerlig för övrigt} \end{cases}$$

   Här approximerar u_n-funktionerna funktion $\operatorname{sign}(\cos(x_0+\cdot))$. (Liten) kalkyl ger $I(x_0) = I(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$.

   b) Banachrummet $L^2[0,\pi]$: Då L^2 är Hilbertrum och A är självadjungerad gäller

   $$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ genvärde till } A\}.$$

   Då $Au(x) = \int_0^\pi e^x \cdot e^y(\cos x\cos y - \sin x \sin y)u(y)dy = ae^x\cos x + be^x \sin x$ fås egenvärdena λ som lösningar till $A(ae^x\cos x + be^x\sin x) = \lambda(ae^x\cos x + be^x \sin x)$ för $|a| + |b| > 0$, dvs

   $$\begin{cases} \Big(\dfrac{3}{8} - \dfrac{\lambda}{e^{2\pi}-1}\Big)a - \dfrac{1}{8}b = 0 \\ \\ \dfrac{1}{8}a - \Big(\dfrac{3}{8} + \dfrac{\lambda}{e^{2\pi}-1}\Big)b = 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger } \lambda = \pm(e^{2\pi}-1)\frac{5}{32}.$$

   Detta ger $\|A\| = \dfrac{5}{32}(e^{2\pi}-1)$.

   Svar:

   $$\|A\|_{C[0,\pi]\to C[0,\pi]} = \frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}})$$

   $$\|A\|_{L^2[0,\pi]\to L^2[0,\pi]} = \frac{5}{2}(2^{2\pi}-1)$$

   Dessutom är A kompakt operator betraktad som operator $C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ och $L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$. Detta följer av

   $$|Au(x_1) - Au(x_2)|^2 \leq \int_0^\pi |a(x_1,y) - a(x_2,y)|^2 dy \|u\|^2_{L^2[0,\pi]},$$

   Arzela-Ascoli sats och inbäddningen $\|u\|_{L^2[0,\pi]} \leq \sqrt{\pi}\|u\|_{C[0,\pi]}$.

2. Beräkna greenfunktionen $g(x,y)$ till differentialoperatorn $Lu = u'' - u$ med randvillkoren $R_1 u = u(0) = 0, R_2 u - u(0) = 0. u_1(x) = e^x, u_2(x) = e^{-x}$ är en bas för $\mathcal{N}(L)$ och ansättningen $\theta(x,t) = a_1(t)u_1(x) + a_2(t)u_2(x)$, där $e(t,t) = 0, e'_x(t,t) = 1$, ger fundamentallösningen $e(x,t) = \sinh(x-t)$. Vi noterar att $g(x,t) = e(x,t)\theta(x-t)$
satisfierar randvillkoren för $t \in (0,1)$. Alltså ges lösningen till $Lu = f, Ru = (R_1 u, R_2 u) = 0$ av

$$u(x) = \int_0^1 \sinh(x-t)\theta(x-t)f(t)dt = \int_0^x \sinh(x-t)f(t)dt.$$

Definiera nu

$$T : C[0,1] \to C[0,1]$$

enligt $Tu(x) = -\int_0^x \sinh(x-t)\frac{1}{2}(1+(u(t^2)))dt$, som är en kontinuerlig funktion då integranden $\in C([0,1]\times[0,1])$. T är en kontraktion då

$$|Tu(x) - Tv(x)| = |\frac{1}{2}\int_0^x \sinh(x-t)((u(t^2)) - (v(t^2)))dt| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^x \sinh(x-t)dt\|u-v\|_\infty = \frac{1}{2}(\cosh x - 1)\|u-v\|_\infty \leq$$
$$\leq \frac{(e-1)^2}{2e}\|u-v\|_\infty \text{ eftersom } \frac{(e-1)^2}{2e} < 1.$$

Banachs fixpunktssats ger existens av entydigt bestämd fixpunkt, vilken också är den entydigt bestämd lösningen till differentialekvationsproblemet.

3. Antag att det finns $S, T \in \mathcal{B}(E)$ sådana att $ST - TS = I$. Detta medför att $TST - T^2S = T = ST^2 - TST$ vilket ger $2T = ST^2 - T^2S$. P.s.s. följer $nT^{n-1} = ST^n - T^nS$ för alla positiva heltal n. Vidare fås då $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ för alla $A, B \in \mathcal{B}(E)$ att

$$n\|T^{n-1}\| \leq \|S\|\,\|T\|\,\|T^{n-1}\| + \|T^{n-1}\|\,\|T\|\,\|S\| \quad n = 2, 3, \ldots$$

Då $\|S\|, \|T\| < \infty$ följer att $\|T^{n-1}\| = 0$ för n tillräckligt stort, dvs $T^{n_0-1} = \mathbf{0} \in \mathcal{B}(E)$ för något positivt heltal.

Men $nT^{n-1} = ST^m - T^nS$ tillämpad på $n = n_0, n_0 - 1, \ldots, 2$ ger $T = \mathbf{0}$. Detta motsäger att $ST - TS = I$. Alltså saknas $S, T \in \mathcal{B}(e)$ med egenskapen ovan.

4. & 5. Kursboken...

6. Antag $T \in \mathcal{B}(H)$ normal och $x \in H$. Då gäller

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^T x, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

och $\|Tx\| = \|T^*x\|$ följer. a) visad.

Av a) följer att $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ för alla normala operator $T \in \mathcal{B}(H)$. Fixera att $\lambda \in \mathbb{C}$. Då är $\lambda I - T$ normal om T är normal ty $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$ och

$$(\lambda I - T)(\bar{\lambda} I - T^*) = |\lambda|^2 I - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + TT^* = \{TT^* = T^*T\} = (\bar{\lambda} I - T^*)(\lambda I - T).$$

Alltså gäller $\mathcal{N}(\lambda I - T) = \mathcal{N}(\bar{\lambda} I - T^*)$ dvs b) visad. Alternativt kan man bara "räkna på" från $\|T^*x - \bar{\lambda}x\|^2$.

Förslag till lösningar till tentamen i TMA400, 2000-05-30

Uppgift 1

Givet $Af(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)\,dy$, $0 \le x \le 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $C[0,2\pi]$: Linjäriteten trivial (men bör visas). Begränsningen av A följer av

$$|Af(x)| = |\int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)\,dy| \le \int_0^{2\pi} \underbrace{|\cos(x-y)|}_{\le 1}\underbrace{|f(y)|}_{\le \|f\|_\infty}\,dy \le$$

$$\le 2\pi\|f\|_\infty,$$

där $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. Alltså följer

$$\|Af\|_\infty \le 2\pi\|f\|_\infty,$$

vilket medför $\|A\| \le 2\pi$.

A är en begränsad linjär operator på $L^2[0,2\pi]$: Linjäriteten trivial som ovan. Begränsningen av A följer av

$$\int_0^{2\pi} |Af(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)||f(y)|\,dy)^2\,dx \le$$

$$\le \{\text{Hölders olikhet}\} \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} |\cos(x-y)|^2\,dy)(\int_0^{2\pi} |f(y)|^2\,dy)\,dx \le 4\pi^2\|f\|_{L^2}^2,$$

där $\|f\|_{L^2} = (\int_0^{2\pi} |f(y)|^2\,dy)^{1/2}$. Alltså följer

$$\|Af\|_{L^2} \le 2\pi\|f\|_{L^2},$$

vilket medför $\|A\| \le 2\pi$.

$\|A\|_{C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]} = 4$: Vi noterar att

$$\|A\|_{C[0,2\pi]\to C[0,2\pi]} \le \int_0^{2\pi} |\cos(x-y)|\,dy = \int_0^{2\pi} |\cos(y)|\,dy = 4.$$

För $n = 1, 2, \ldots$, låt f_n vara kontinuerliga funktioner på $[0,2\pi]$ som uppfyller $\|f_n\|_\infty = 1$ och dessutom $= 1$ på intervallen $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \bigcup [\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{n}, 2\pi]$ och $= -1$ på intervallet $[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ (här kan f_n t.ex. väljas som styckvis linjära funktioner). Då gäller

$$Af_n(0) \le 4$$

samt

$$Af_n(0) \ge \int_0^{2\pi} |\cos(y)|\,dy - 2 \cdot \frac{2}{n} = 4 - \frac{4}{n},$$

vilket visar påståendet ovan.

$\|A\|_{L^2[0,2\pi]\to L^2[0,2\pi]} = \pi$: Vi noterar att A är en kompakt självadjungerad operator på Hilbertrummet L^2, varför $\|A\|_{L^2[0,2\pi]\to L^2[0,2\pi]} = \sup\{|\lambda| : \lambda$ egenvärde till $A\}$. Eftersom $Af(x) = a\cos x + b\sin x$, där $a, b \in \mathbb{R}$ beror på f, ges varje egenfunktion på denna form. Liten kalkyl ger att λ är ett egenvärde till A om ekvationssystemet

$$A(a\cos(\cdot) + b\sin(\cdot))(x) = \lambda(a\cos(x) + b\sin(x))$$

i a, b har en icke-trivial lösning, dvs om $\lambda = \pi$.

Uppgift 2

Vi har $f \in C[0,1], \lambda \in \mathbb{R}$, där $|\lambda| < e(e-1)$, och ska visa att

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + \lambda|u(x)| = f(x),\ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u \in C^2 \end{cases}$$

har en entydigt bestämd lösning.

1. Greenfunktioen till $\begin{cases} u'' + u' = F & x \in (0,1) \\ u(0) = u(t) = 0 \end{cases}$:

   Antag $e(x,t) = a_1(t) + a_2(t)e^{-x}$ uppfyller $\begin{cases} e(t,t) = 0 \\ e'_x(t,t) = 1 \end{cases}$. Detta ger $e(x,t) = 1 - e^{t-x}$. Greenfunktionen ges av

   $$g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + b_1(t) + b_2(t)e^{-x}.$$

   Villkoren $g(0,t) = g(1,t)$, $0 < t < 1$ ger

   $$\begin{cases} b_1(t) + b_2(t) = 0 \\ 1 - e^{t-1} + b_1(t) + b_2(t)e^{-1} = 0,\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

   Alltså $g(x,t) = \theta(x-t)(1-e^{t-x}) + \frac{e^t-e}{e-1} + \frac{e-e^t}{e-1}e^{-x}$. Vi noterar att $g(x,t) \le 0$ alla x, t.

2. Sätt

   $$\begin{cases} (Tu)(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)(f(t) - \lambda|u(t)|)dt,\ 0 \le x \le 1 \\ u \in C[0,1] \end{cases}$$

   Det ursprungliga problemet har en unik lösning omm T har en unik fixpunkt. För $u, v \in C[0,1]$ gäller

   $$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = |\int_0^1 g(x,t)(\lambda|v(t)| - \lambda|u(t)|)dt| \le$$
   $$\le |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)||u(t)| - |v(t)||dt \le |\lambda| \int_0^1 |g(x,t)|dt\|u-v\|_\infty$$

Sätt $j(x) = \int_0^1 |g(x,t)|dt$. Här är $j(x) = \int_0^1 g(x,t)(-1)dt$, lösningen till $j'' + j' = -1$ med randvillkoren $j(0) = j(1) = 0$. Alltså $j(x) = \frac{e}{e-1} - x - \frac{e}{e-1}e^{-x}$ med $j_{\max} = j(\ln\frac{e}{e-1}) = \frac{1}{e-1} + \ln(1-\frac{1}{e}) \le \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e(e-1)}$.

Härav följer $\|Tu - Tv\|_\infty \le \frac{|\lambda|}{e(e-1)}\|u-v\|_\infty$, och Banach fixpunktssats medför att T har unik fixpunkt om $|\lambda| < e(e-1)$.

Uppgift 3

Givet avbildningen

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \ldots, \frac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n), \ldots).$$

Visa att

1. $T : \ell^2 \to \ell^2$ är en begränsad linjär operator
2. T ej är surjektiv

Linjäriteten hos T är trivial.

T begränsad operator: Tag $\mathbb{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^2$ och betrakta $\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2}$. VLOG kan vi anta att $x_n \ge 0$ för alla n.

$$\begin{aligned}\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} &= x_1^2 + \frac{1}{2^2}(x_1+x_2)^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}(x_1 + \ldots x_n)^2 + \ldots = \\ &= \Sigma_{k=1}^\infty x_k^2(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots) + \\ &+ \Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=k+1}^\infty 2x_k x_j(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{(j+1)^2} + \ldots).\end{aligned}$$

Vidare gäller

$$\Sigma_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} \le \begin{cases} \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n-1}, & n \ge 2 \\ 2 & n = 1 \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\|T\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} &\le 2\|\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} + 2\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=k+1}^\infty x_k x_j \frac{1}{j-1} \le \\ &\le 2\|\mathbb{x}\|^2_{\ell^2} + 4\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{x_k x_j}{k+j}.\end{aligned}$$

Dessutom har vi

$$\begin{aligned}&\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{x_k x_j}{k+j} = \Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \{(\frac{1}{k+j})^{1/2}(\frac{k}{j})^{1/4}x_k\}\{(\frac{1}{k+j})^{1/2}(\frac{j}{k})^{1/4}x_j\} \le \\ &\le \{\text{Hölders olikhet}\} \le \\ &(\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2}x_k^2)^{1/2}(\Sigma_{k=1}^\infty \Sigma_{j=1}^\infty \frac{1}{k+j}(\frac{j}{k})^{1/2}x_j^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Här är

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2}x_k^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty}x_k^2\,\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2},$$

där

$$\begin{aligned}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k+j}(\frac{k}{j})^{1/2} &\leq \int_0^{\infty}\frac{1}{k+x}(\frac{k}{x})^{1/2}\,dx = \{y=\frac{x}{k}\} = \\ &= \int_0^{\infty}\frac{1}{1+y}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = C,\end{aligned}$$

med C oberoende av k. Följdaktligen gäller

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\Sigma_{j=1}^{\infty}\frac{x_k x_j}{k+j} \leq C\|\mathbb{x}\|_{\ell^2}^2$$

vilket medför att $\|T\mathbb{x}\|_{\ell^2} \leq \sqrt{2+4C}\|\mathbb{x}\|_{\ell^2}$.

T ej surjektiv: Vi noterar att $T:\ell^2 \to \ell^2$ är injektiv, dvs $T\mathbb{x}_1 = T\mathbb{x}_2 \Rightarrow \mathbb{x}_1 = \mathbb{x}_2$, och begränsad. Om T är surjektiv så ger den inversa avbildningssatsen att T^{-1} är en begränsad linjär avbildning. Sätt

$$\mathbb{y}_n = (0,0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{plats } n},0,\ldots).$$

Då gäller $\|\mathbb{y}_n\|_{\ell^2} = 1$ och

$$T^{-1}\mathbb{y}_n = (0,0,\ldots,0,\underbrace{n}_{\text{plats } n},\ldots),$$

dvs $\|T\mathbb{y}_n\|_{\ell^2} \geq n$, för alla n. Detta medför $\|T^{-1}\| = \infty$, vilket ger en motsägelse. Alltså T är ej surjektiv. (Alternativt kan man notera att följden

$$\mathbb{y} = (1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\ldots) \in \ell^2$$

medan den enda sekvens $\mathbb{x}$ sådan att $T\mathbb{x} = \mathbb{y}$ ges av

$$\mathbb{x} = (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) \notin \ell^2.)$$

Uppgift 4 & 5

Se kursboken.

Uppgift 6

Låt T vara en begränsad linjär operator på ett Hilbertrum H med $\|T\| = 1$. Antag att $Tx_0 = x_0$ för ett $x_0 \in H$. Ska visa att $T^*x_0 = x_0$.

Betrakta

$$\begin{aligned}\|T^*x_0 - x_0\|^2 &= \langle T^*x_0 - x_0, T^*x_0 - x_0\rangle = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle T^*x_0, x_0\rangle - \langle x_0, T^*x_0\rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \langle x_0, Tx_0\rangle - \langle Tx_0, x_0\rangle + \|x_0\|^2 = \\ &= \|T^*x_0\|^2 - \|x_0\|^2 \leq (\|T^*\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = \\ &= (\|T\|^2 - 1)\|x_0\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Alltså gäller $T^*x_0 = x_0$.