Niklas

3

H1. Förutsäg, utgående från skalmodellen, spinn och paritet hos grundtillstånden av: (a) ^{7}Li; (b) ^{11}B; (c) ^{15}C; (d) ^{17}F; (e) ^{31}P; (f) ^{141}Pr

H2. (a) Om energin för ett enpartikel-tillstånd, i avsaknad av spinnban-koppling, är E_0. Vad blir då energin på de två tillstånden i en spinnban-dublett vars energiskillnad är $\frac{1}{2}(2l+1)\hbar^2$. (b) Visa att medelenergin av alla tillstånd som ingår i dubletten är E_0.

H3. Kärnan ^{228}Th har sin första exciterade nivå, som är av rotationskaraktär, vid 57 keV och nivån har spinn-paritet 2^+. Andra exciterade nivåer ligger vid 186, 328, 393 och 965 keV. Vilken eller vilka nivåer tillhör rotationsbandet bildat på grundtillståndet?

H4. Om man jämför de lågt liggande tillstånden i ^{17}O och ^{19}O finner man att den största skillnaden är att ^{19}O har två extra tillstånd. Dessa har spinn-paritet $\frac{3}{2}^+$ och $\frac{9}{2}^+$. Visa att dessa tillstånd kan uppstå från konfigurationen $(d_{5/2})^3$ och därför ej förväntas förekomma i ^{17}O.

I1. Hur stor del av tiden befinner sig protonen och neutronen i en deuteron utanför den starka kraftens räckvidd? Antag att den starka kraften kan beskrivas med en sfärisk lådpotential med parametrar: $V_0 = 35$ MeV, $R = 2.1$ fm. Bindningsenergin för deuteronen är $E_b = 2.22$ MeV och grundtillståndet är huvudsakligen ett s-tillstånd.

$\boxed{5.1}$ Den oparade nukleonen bestämmer spinn och paritet

(H1) $\pi = (-1)^l$

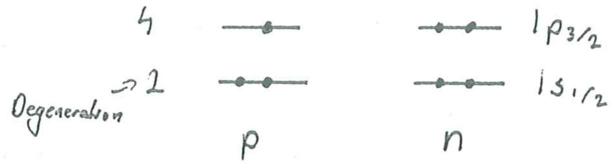
$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, $j = l \pm \frac{1}{2}$

	s	p	d	f
$l =$	0	1	2	3

Degeneration $= 2j+1$

a) ${}^{7}_{3}Li_{4}$ se fig. 5.6 skalmodellspotential + SO-vxv

notera ej samma huvudkvanttal som för atomer



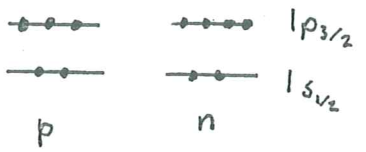
Alla neutroner är parade. En $p_{3/2}$ proton är oparad

$\therefore$ $j = 3/2$, paritet $(-1)^1 = -1$

$\Rightarrow$ Grundtillståndet för ^7Li är $\underline{\underline{\frac{3}{2}^-}}$

(Den "extrema" skalmodellen säger att bara den oparade nukleonen bestämmer kärnans egenskaper.)

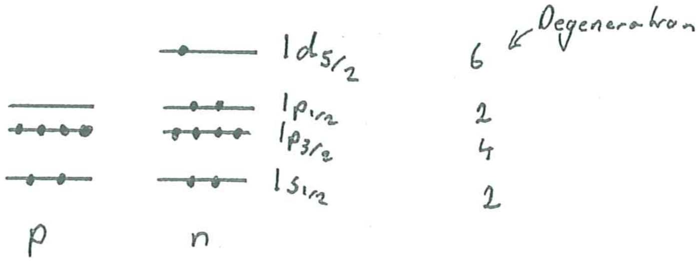
b) ${}^{11}_{5}B_{6}$



Oparad proton i $1p_{3/2}$ $\Rightarrow$

Grundtillståndet för ^{11}B är $\frac{3}{2}^-$

c) ${}^{15}_{6}C_{9}$



1 neutron utanför fyllt skal

$\Rightarrow$ Grundtillståndet för ^{15}C är $\frac{5}{2}^+$ $(d \Rightarrow l = 2)$

d) ${}^{17}_{9}F_{8}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{2}^+$

e) ${}^{31}_{15}P_{16}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}^+$

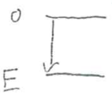
f) ${}^{141}_{59}Pr_{82}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{2}^+$

5.6 Vad händer med energinivåerna om man "kopplar på" spinn-ban kopplingen.

(H2)

$$H_0 \longrightarrow H_0 + V_{so}(r)\,\vec{l}\cdot\vec{s}$$

$\Rightarrow$ bindnings-energi $E = E_0$ $\qquad E = E_0 + \langle V_{so}(r)\rangle \langle \vec{l}\cdot\vec{s}\rangle$



?

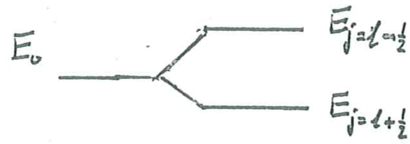
$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{j}^{\,2} = \vec{l}^{\,2} + \vec{s}^{\,2} + 2\vec{l}\cdot\vec{s}$$

$$\therefore \langle \vec{l}\cdot\vec{s}\rangle = \frac{1}{2}\langle(\vec{j}^{\,2} - \vec{l}^{\,2} - \vec{s}^{\,2})\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right] = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2}\,l & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2}(l+1) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alltså

$$\begin{cases} E_{j=l+\frac{1}{2}} = E_0 + \frac{\hbar^2}{2}\,l\,\langle V_{so}(r)\rangle \\ E_{j=l-\frac{1}{2}} = E_0 - \frac{\hbar^2}{2}(l+1)\langle V_{so}(r)\rangle \end{cases}$$



$$\Delta E = E_{j=l+\frac{1}{2}} - E_{j=l-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar^2}{2}(2l+1)\langle V_{so}(r)\rangle \qquad \text{Jmf (5.4)}$$

Degenerationen av $E_{j=l+\frac{1}{2}}$ nivån är $2j+1 = 2l+2$

—— " —— $E_{j=l-\frac{1}{2}}$ —— " —— $2j+1 = 2l$

$$\text{"Center of gravity"} = \frac{(2l+2)\left[E_0 + \frac{\hbar^2}{2}\,l\,\langle V_{so}(r)\rangle\right] + 2l\left[E_0 - \frac{\hbar^2}{2}(l+1)\langle V_{so}(r)\rangle\right]}{(2l+2) + 2l} =$$

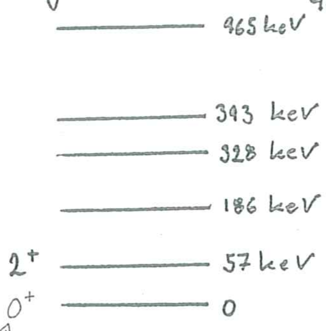
$$= \underline{\underline{E_0}}$$

Q.E.D

E2

(H3)

Energinivådiagram för $^{228}_{90}Th_{138}$ (Thorium)



Kollektiv excitation: Kärnan exciteras genom att alla nukleoner rör sig kollektivt, tex rotation eller vibration.

jämn-jämn kärna => grundtillståndet är 0^+ !

Deformerade kärnor är vanliga för $150 < A < 190$ och $A > 230$

Magiska tal i denna region $N, Z = 82, 126$

$\therefore$ ^{228}Th är antagligen deformerad => kollektiva excitationer

För en jämn-jämn kärna

(klassiskt) $\left.\begin{array}{l} E_{rot} = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 \\ l = \mathcal{J}\omega \end{array}\right\} \Rightarrow E_{rot} = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2\mathcal{J}}$ (kvantmek $l^2 \to \hbar^2 I(I+1)$)

tröghetsmoment

Kärnan är spegelsymmetrisk => $\pi = +1$ => I jämn i rotationsbandet som bygger på grundtillst. 0^+

Antag att $\mathcal{J}$ är konstant

$$E_{rot}(0^+) = 0$$

$$E_{rot}(2^+) = 6 \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} = 57 \text{ keV} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} = 9{,}5 \text{ keV}$$

$$E_{rot}(4^+) = 20 \text{ ''} = 190 \text{ keV}$$

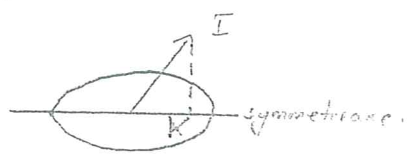
$$E_{rot}(6^+) = 42 \text{ ''} \simeq 399 \text{ keV}$$

$$E_{rot}(8^+) = 72 \text{ ''} = 684 \text{ keV}$$

$$E_{rot}(10^+) = 110 \text{ ''} = 1045 \text{ keV}$$

$\therefore$ Nivåerna 57 keV (2^+), 186 keV (4^+) och 393 keV (6^+) tillhör rotationsbandet bildat på grundtillståndet.

Mer allmänt gäller att



$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \left[I(I+1) - K^2 \right]$$

där $I = K, K+1, K+2, \ldots$ om $K \neq 0$ ← rotationsband

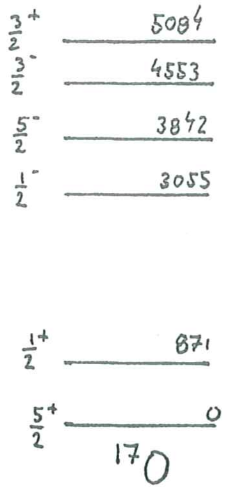
$I = 0, 2, 4, \ldots$ om $K = 0$ ←

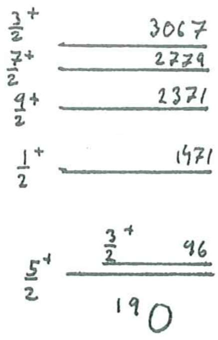
och $K=0$ för jämn-jämn kärna

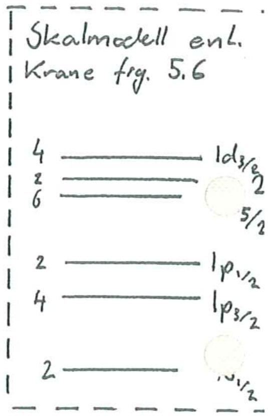
$\boxed{5.14}$ Använd skalmodellen för att förklara energinivådiagrammen hos $^{17}_{8}O_9$, $^{19}_{8}O_{11}$

1(4)

(H4)







Lösning

$\boxed{^{17}O}$ 8 p, 8+1 n } 1 valensneutron i $1d_{5/2}$

=> grundtillstånd $\frac{5}{2}^+$

$\frac{1}{2}^+$: exciterad neutron i $2s_{1/2}$

$\frac{1}{2}^-$: excitera en $1p_{1/2}$ neutron till $1d_{5/2}$ => ett hål i $1p_{1/2}$ (Här måste vi bryta ett par i $1p_{1/2}$-skalet. Detta kostar ca 2MeV)

[$\frac{5}{2}^-$, $\frac{3}{2}^-$ kan vara $|1p_{1/2}\rangle \oplus |1d_{5/2}\rangle \oplus |1d_{5/2}\rangle$
$\frac{3}{2}^+$ kan vara 1 neutron i $1d_{3/2}$]

$\boxed{^{19}O}$ 8p, 8+3n } 3 neutroner i $1d_{5/2}$ [6 st ryms ty $m_j = -\frac{5}{2}, \ldots, \frac{5}{2}$]

I grundtillståndet kopplar 2 neutroner till 0^+

=> 1 oparad neutron i $1d_{5/2}$ => $\frac{5}{2}^+$

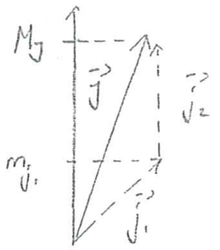
$\frac{1}{2}^+$: neutron i $2s_{1/2}$ (Jmf ^{17}O)

Vilka tillstånd fås ur $|1d_{5/2}\rangle \oplus |1d_{5/2}\rangle \oplus |1d_{5/2}\rangle$?

5.14
2(4)

- Koppla först två neutroner till totalt spinn $\vec{J}$

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$



$$\begin{cases} m_{j_i} = -j_i, \dots, j_i \\ m_J = -J, \dots, J \\ m_J = m_{j_1} + m_{j_2} \end{cases}$$

Plotta m_J som funktion av m_{j_1} & m_{j_2}

$m_{j_2} \backslash m_{j_1}$	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2
5/2	5	4	3	2	1	0
3/2	4	3	2	1	0	-1
1/2	3	2	1	0	-1	-2
-1/2	2	1	0	-1	-2	-3
-3/2	1	0	-1	-2	-3	-4
-5/2	0	-1	-2	-3	-4	-5

m_J

Vad menas med antisymmetrisk vågfunktion?
Antag att $\hat{P}$ = permutationsoperator => byter plats på nukleon 1 och 2
Antisymmetrisk v.f. har då egenskapen att
$\hat{P}\Psi(1,2) = \Psi(2,1) = -\Psi(1,2)$

Neutronerna är identiska fermioner
=> Vågfunktionen måste vara antisymmetrisk

Ex/ $m_J = 5$ => $[m_{j_1}, m_{j_2}] = [\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$

$$\Psi = \Psi_1(\tfrac{5}{2})\Psi_2(\tfrac{5}{2})$$

$$\hat{P}\Psi = \Psi_2(\tfrac{5}{2})\Psi_1(\tfrac{5}{2}) \neq -\Psi$$

$$\Psi_{antisym.} = [\Psi - \hat{P}\Psi]\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Hur skapa en a.sym. vågfunktion från Ψ?
Svar: $\Psi_{a.sym} = (\Psi - \hat{P}\Psi)\frac{1}{\sqrt{2}}$ ← normaliser
ty $\hat{P}\Psi_{a.sym} = -\Psi_{a.sym}$

$m_J = 4$ => $[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$ & $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$
konfiguration a   konfiguration b

$$\Psi_a = [\Psi_1(\tfrac{5}{2})\Psi_2(\tfrac{3}{2}) - \Psi_2(\tfrac{5}{2})\Psi_1(\tfrac{3}{2})]\frac{1}{\sqrt{2}} = -\Psi_{a_{1\leftrightarrow 2}} \quad \text{OK!}$$

$$\Psi_b = [\Psi_1(\tfrac{3}{2})\Psi_2(\tfrac{5}{2}) - \Psi_2(\tfrac{3}{2})\Psi_1(\tfrac{5}{2})]\frac{1}{\sqrt{2}} = -\Psi_{b_{1\leftrightarrow 2}} \quad \text{OK!}$$

Att vågfunktionen $\equiv 0$ innebär att detta tillstånd inte existerar. Detta är en följd av att kvanttalen är identiska för de två neutronerna ($j, m_j, l, s, \dots$)
Dvs. att kräva en antisymmetrisk vågfunktion är ett sätt att uppfylla Pauliprincipen!

Men $|\Psi_a|^2 = |\Psi_b|^2$. Detta är vad vi kan observera
=> a & b identiska

P.s.s. fås

m_J	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
# tillstånd	0	1	1	2	2	3	2	2	1	1	0	Σ: 15

Konsistent med: $J_1^\pi = 0^+ \Rightarrow m_J = 0$ (singlett)
$J_2^\pi = 2^+ \Rightarrow m_J = -2,-1,0,1,2$ (kvintett)
$J_3^\pi = 4^+ \Rightarrow m_J = -4,\dots,4$ (nonett)

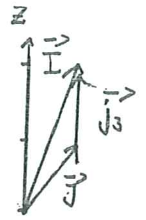
Σ 15 OK!

Positiv paritet ty $\pi_{tot} = (-1)^{l=2} \cdot (-1)^{l}$
$= +1$

Notera hur två nukleoner från samma skal alltid bildar jämna, heltaliga totala spinn och positiv paritet. 0^+ är den energimässigt mest fördelaktiga kopplingen.

- Koppla nu den sista neutronen. Utnyttja vad vi lärde oss ovan nämligen att en antisymmetrisk vågfunktion kräver att alla kvanttal inte kan vara lika! För nukleoner i samma energinivå måste alltså m_j vara olika

$$|I M_I\rangle = \underbrace{|1d_{5/2}\rangle \otimes |1d_{5/2}\rangle}_{|J m_J\rangle} \otimes |1d_{5/2}\rangle$$



$M_I = m_{j_1} + m_{j_2} + m_{j_3}$

M_I	#tillstånd	kombinationer av $m_{j_1}, m_{j_2}, m_{j_3}$
$\frac{15}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$	omöjligt	pga Pauliprincipen
$\frac{9}{2}$	1	$[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$
$\frac{7}{2}$	1	$[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$
$\frac{5}{2}$	2	$[\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}]$ & $[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$
$\frac{3}{2}$	3	$[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}]$ & $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}]$ & $[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$
$\frac{1}{2}$	3	$[\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}]$ & $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}]$ & $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}]$

Analogt för negativa M_I

15.141

4(4) Detta är konsistent med $I^{\pi} = \frac{9}{2}^{+}, \frac{5}{2}^{+}, \frac{3}{2}^{+}$

Här hittar vi grundtillståndet som vi redan visste om $\left(0^{+} \otimes \frac{5}{2}^{+}\right)$

$\therefore$

$\frac{3}{2}^{+}$ (96 keV) : 3 neutroner i $1d_{5/2}$

$\frac{9}{2}^{+}$ (2371 keV) : ——— " ———

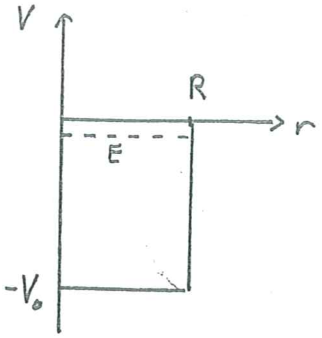
Tillstånden $\frac{7}{2}^{+}$, $\frac{3}{2}^{+}$ (3067 keV) skulle kunna förklaras med

$|1d_{5/2}\rangle \otimes |1d_{5/2}\rangle \otimes |2s_{1/2}\rangle$

$\boxed{4.4}$ (I1) Hur stor del av tiden befinner sig neutronen och protonen i deuteronen utanför den starka kraftens räckvidd?

Lösning

Vi kan modellera den starka kraften med en 3D-Lådpotential



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r<R \\ 0 & r>R \end{cases}$$

Experiment ger $\begin{cases} V_0 \approx 35\,MeV \\ R \approx 2{,}1\,fm \\ \text{Bindningsenergi} = -E = 2{,}22\,MeV \end{cases}$

Separera vågfunktionen

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \phi(r) f(\theta,\varphi) \quad , \quad \text{skriv } \phi(r) = \frac{u(r)}{r}$$

Antag $L=0$ i grundtillståndet. Den radiella delen av S.E:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + V(r)\,u(r) = E\,u(r)$$

Deuteron $I^{\pi} = 1^+$
$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{L} + \vec{S}_n + \vec{S}_p$
$\Rightarrow \begin{cases} \vec{S}_n, \vec{S}_p \text{ parallella} & L=0 \\ \quad - \text{ || } - & L=2 \end{cases}$

där $$\mu = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p} = 470\,MeV/c^2$$

med Lösning

$$u(r) = \begin{cases} A\sin k_1 r + B\cos k_1 r & , r<R & , k_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(E+V_0)} \approx 0{,}89\,fm^{-1} \\ Ce^{-k_2 r} + De^{k_2 r} & , r>R & , k_2 = \sqrt{-\frac{2\mu}{\hbar^2}E} \approx 0{,}23\,fm^{-1} \end{cases}$$

Villkor

- $u(r) \to 0$ då $r \to 0$ $\Rightarrow B=0$
- $\frac{u(r)}{r} \to 0$ då $r \to \infty$ $\Rightarrow D=0$
- Kontinuitet hos $u(r)$ och $\frac{du}{dr}$ vid $r=R$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} A\sin k_1 R &= Ce^{-k_2 R} && (1) \\ Ak_1\cos k_1 R &= -Ck_2 e^{-k_2 R} && (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1 \cot(k_1 R) = -k_2 \quad (3)$$

- Normalisering

$$1 = \int_0^\infty \phi^2(r)\, r^2 dr = \int_0^\infty u^2(r)\, dr = \int_0^R dr\, A^2 \underbrace{\sin^2 k_1 r}_{=\frac{1-\cos 2k_1 r}{2}} + \int_R^\infty dr\, C^2 e^{-2k_2 r} =$$

forts

$\boxed{4.4}$

$$= \frac{A^2}{2}\left(R - \frac{\sin 2k_1 R}{2k_1}\right) + C^2 \frac{e^{-2k_2 R}}{2k_2} = (1) = \frac{C^2 e^{-2k_2 R}}{2\sin^2 k_1 R}\left(R - \frac{\sin 2k_1 R}{2k_1}\right) + \frac{C^2 e^{-2k_2 R}}{2k_2} =$$

$$= \frac{C^2 e^{-2k_2 R}}{2k_2 \sin^2 k_1 R}\left(Rk_2 - \frac{k_2}{2k_1}\sin 2k_1 R + \sin^2 k_1 R\right) = \left\{ \begin{matrix} (3) \\ \frac{k_2}{k_1} = -\cot k_1 R \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{C^2 e^{-2k_2 R}}{2k_2 \sin^2 k_1 R}\left(Rk_2 + \underbrace{\frac{1}{2}\cot k_1 R \cdot 2\sin k_1 R \cos k_1 R + \sin^2 k_1 R}_{=1}\right) = \frac{C^2 e^{-2k_2 R}}{2k_2 \sin^2 k_1 R}\left(Rk_2 + 1\right)$$

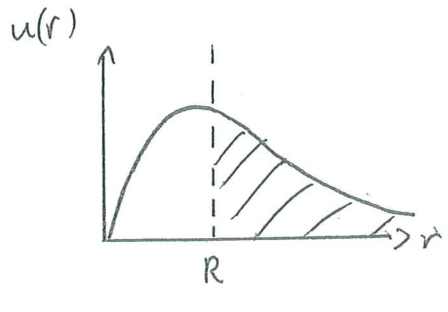
$$\therefore C^2 = \frac{2k_2 \sin^2 k_1 R \cdot e^{2k_2 R}}{1 + Rk_2} \qquad (4)$$

R <=> Starka kraftens räckvidd

Deuteronen har $r > R$ med sannolikheten:

$$P(r>R) = \int_R^\infty u^2(r)\,dr = C^2 \int_R^\infty e^{-2k_2 r}\,dr = C^2 \frac{e^{-2k_2 R}}{2k_2} = (4) = \frac{\sin^2 k_1 R}{1 + Rk_2}$$

$$\Rightarrow P(r>R) = 0{,}62$$



Svar: 62% av tiden

Niklas

2

C1. (a) Beräkna skillnaden i bindningsenergi ΔB mellan spegelkärnorna ^{15}O och ^{15}N. (b) Beräkna kärnradien av de båda isotoperna under antagandet att skillnaden i ΔB endast uppkommer på grund av skillnader i Coulomb-energi.

C3. Härled, med hjälp av semiempiriska massformeln, ett uttryck för den frigjorda energin vid symmetrisk fusion. För vilka atomtal blir denna positiv? Vid symmetrisk fusion slås två likadana kärnor (A, Z) ihop till en kärna $(2A, 2Z)$. Antag att $A = 2Z$. (Vilket är rimligt för lätta isotoper men ej för tunga. Varför?)

C4. Betrakta protonen som en homogent laddad, roterande sfär med laddningstäthet ρ, radie R, massa m och vinkelfrekvens ω. (a) Visa att $\mu = e\omega R^2/5$ genom att integrera över laddningstätheten. (b) Använd det klassiska sambandet mellan tröghetsmoment och vinkelfrekvens för att visa sambandet $\omega R^2 = 2.5s/m$. (c) Visa slutligen att $\mu = (e/2m)s$.

D1. Beräkna Q-värdet i följande sönderfall:
(a) $^{247}\text{Bk} \rightarrow {}^{243}\text{Am} + \alpha$
(b) $^{251}\text{Cf} \rightarrow {}^{247}\text{Cm} + \alpha$
(c) $^{230}\text{Th} \rightarrow {}^{226}\text{Ra} + \alpha$

D2. Beräkna den kinetiska energin och hastigheten för dotterkärnorna i föregående uppgift.

D4. Använd en halvklassisk bild, i vilken en α-partikel med $l = 0$ emitteras längs en linje genom centrum av kärnan. (a) Hur långt från centrum av kärnan kommer en α-partikel med $l = 1$ respektive $l = 2$ att emitteras? Antag $Q = 6$ MeV och $A = 230$. ~~(b) Vad blir dotterkärnans rotationsenergi om all rekylenergi omvandlas till rotationsenergi.~~

12

C1

a/ Skillnad i bindningsenergi mellan $_8O_7$, $_7N_8$! (spegelkärnor)

b/ Antag att skillnaden uppkommer enbart pga skillnaden i Coulombenergi och beräkna kärnradien. Vilken kärna är hårdast bunden?

Lösning

Atom: $\frac{B.E}{M_{atom}} \approx 10^{-8}$

Kärna $\frac{B.E}{M_{kärna}} \sim 10^{-2}$

$\Rightarrow$ Vi kan ej separera massan från B.E.

a/ Bindningsenergin för en kärna $^A_Z X_N$

$$B = \left\{ Z m_p + N m_n - \underbrace{m_k(^A X)}_{\text{kärnmassa}} \right\} c^2$$

kärnmassa $= \underbrace{m(^A X)}_{\text{atommassa}} - Z m_e + \underbrace{B_{atomic}}_{\sim eV}$

$$= \left\{ Z m(^1H) + N m_n - m(^A X) \right\} c^2$$

Här:

$$\Delta B = B(^{15}_7N - {}^{15}_8O) = \left\{ -m(^1H) + m_n - m(^{15}N) + m(^{15}O) \right\} c^2 = \left\{ \begin{matrix} P.H \\ T6.2 \& 6.3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ -1.007825 + 1.00866 - 15.000109 + 15.003066 \right\} (u) \cdot c^2 = 0{,}00379\,(u) \cdot c^2$$

$1u = 931{,}494\ MeV/c^2$

Notera: många decimaler behövs

$1u = \frac{m(^{12}C)}{12}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta B = 3{,}532\ MeV}}$$

b/ Om vi antar att kärnan är en sfär med konstant laddningstäthet, ρ, så är Coulombenergin

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Jmf PH s309, $Z(Z-1)$ (där de har antagit Z protoner med en kont. laddningsfördelning får man Z^2)

$$\left[E_c = \int \rho(x) \phi(x) d^3x = 4\pi \int_0^R \underbrace{\frac{Ze \cdot 3}{4\pi R^3}}_{=\rho} \cdot \frac{Ze\,3}{4\pi R^3} \frac{4\pi r^3}{3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} r^2 dr = \frac{Z^2 e^2\, 3}{R^6\, 4\pi\varepsilon_0} \frac{R^5}{5} = \frac{3Z^2 e^2}{5 \cdot 4\pi\varepsilon_0 R} \right]$$

där R är radien och $Z \cdot e$ den totala laddningen.

$$\Delta B = E_c(^A_Z Y) - E_c(^A_{Z-1} Y) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \left[Z^2 - (Z-1)^2 \right] = \frac{3}{5} \frac{e^2 (2Z-1)}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Antag $R \propto A^{1/3} \Rightarrow R(^{15}O) = R(^{15}N)$

$$\Rightarrow \underline{R} \simeq \frac{e^2(2Z-1)}{4\pi\varepsilon_0 \Delta B} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 1{,}44\,(MeV\,fm) \cdot \frac{(2 \cdot 8 - 1)}{3{,}532\ MeV} \simeq \underline{\underline{3{,}67\ fm}}$$

Exp. $R(^{15}N) = 2{,}42(10)$
$R(^{15}O) = 2{,}44(04)$

Ozawa et al NPA

$R = 1{,}2 \cdot 15^{1/3} = 2{,}96$

Med $Z(Z-1)$ fås $R = 3{,}42$

C3

Symmetrisk fusion

Uppskatta, med hjälp av semiemp. massformeln, för vilka isotoper som symmetrisk fusion ger $Q > 0$. Symmetrisk fusion innebär att två likadana isotoper slås ihop. Antag $A = 2Z$ (vilket är rimligt för lätta isotoper)

Lösning Använd semiemp. massformeln

$$M(Z,A) = Z\, m(^1H) + N m_n - \frac{B(Z,A)}{c^2}, \quad \text{där}$$

$$B(Z,A) = \underbrace{a_v A}_{\text{Volymterm}} - \underbrace{a_s A^{2/3}}_{\text{Ytterm}} - \underbrace{a_c Z(Z-1) A^{-1/3}}_{\text{Coulombrepulsion}} - \underbrace{a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}}_{\text{Symmetriterm}} + \underbrace{\delta(Z,A)}_{\text{Parterm}}$$

Volymterm: $B \propto A$, ej $A(A-1)$ $\because$ bara vxv med närmaste granne

Ytterm: Nukleoner på ytan har färre grannar.

Coulombrepulsion: $\propto \frac{1}{R} \propto A^{-1/3}$

Symmetriterm: Favoriserar $Z = \frac{A}{2}$. Viktigast för små A $\Rightarrow$ ej ^{100}H

Parterm: Favoriserar jämna N, Z. $\delta = \pm a_p A^{-3/4}$

Q-värde $\quad Q = (M_{före} - M_{efter})c^2 = E_{före} - E_{efter}$

Utan parterm:

$$Q = \left\{ 2M(Z,A) - M(2Z,2A) \right\} c^2 = B(2Z,2A) - 2B(Z,A) =$$

$$= a_s \left(2A^{2/3} - (2A)^{2/3} \right) + a_c \left[2Z(Z-1)A^{-1/3} - 2Z(2Z-1)(2A)^{-1/3} \right]$$

$$= a_s A^{2/3} \left(2 - 2^{2/3} \right) + a_c 2Z A^{-1/3} \left[(Z-1) - (2Z-1) 2^{-1/3} \right]$$

$$= \left[a_s \left(2 - 2^{2/3} \right) + a_c 2 \frac{Z}{A} \left[Z \left(1 - 2^{2/3} \right) - 1 + 2^{-1/3} \right] \right] A^{2/3}$$

Antag $A = 2Z$ och undersök när $Q > 0$

$$\Rightarrow \quad a_s\left(2-2^{2/3}\right) + a_c\left[Z\left(1-2^{2/3}\right) - 1 + 2^{-1/3}\right] > 0$$

$$\Rightarrow \quad a_c Z\left(2^{2/3}-1\right) < a_c\left(2^{-1/3}-1\right) + a_s\left(2-2^{2/3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z < \frac{2^{-1/3}-1}{2^{2/3}-1} + \frac{a_s}{a_c}\,\frac{2\left(1-2^{-1/3}\right)}{2^{2/3}-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z < \left(2\frac{a_s}{a_c} - 1\right)\frac{1-2^{-1/3}}{2^{2/3}-1}$$

Med $a_s = 16{,}8$ MeV

$a_c = 0{,}72$ MeV

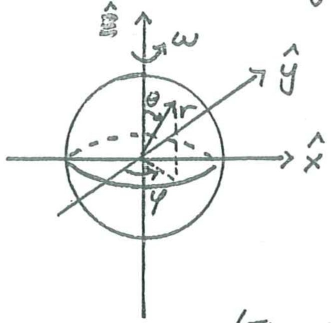
fås $Z < 16$

$\therefore \quad 2\;{}^{32}16 \to {}^{64}32$ 60 ~ max i massparabeln

ex. ^{58}Fe

3.20 (C4) Betrakta protonen som en homogent laddad sfär med laddningstäthet ρ, radie R, massa m och rotation $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

Beräkna det magnetiska momentet.



(Ekv 16.10)

Lösning Magnetiskt moment $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int(\vec{r} \times \vec{j})\,dV$ (dipol)

↑strömtäthet

Laddningstäthet: $\frac{4\pi R^3}{3}\rho = +e$

Strömtäthet: $\vec{j} = \rho\vec{v}$, $\vec{v}$ hastigheten i punkten (r, θ, φ)

$\vec{v} = \omega \cdot r\sin\theta\,\hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{j}) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \rho\omega r\sin\theta\,\underbrace{(\hat{r} \times \hat{\varphi})}_{= -\hat{\theta}} = -\left(\frac{3e\omega}{8\pi R^3}\right) r^2 \sin\theta\,\hat{\theta}$$

I cartesiska basvektorer: $\hat{\theta} = \cos\theta\,[\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}] - \sin\theta\,\hat{z}$

Volymelementet: $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Notera att $\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\mu}}} = -\left(\frac{3e\omega}{8\pi R^3}\right)\hat{z}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} dr\, r^2\sin\theta\,(-\sin\theta)\, r^2\sin\theta =$$

$$= \left\{ \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta\,[1 - \cos^2\theta]\,d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \frac{3e\omega}{8\pi R^3}\, 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5}{5}\,\hat{z} = \underline{\underline{\frac{e\omega R^2}{5}\,\hat{z}}} \qquad (1)$$

b) Klassiskt (Newton) $\vec{L} = I\vec{\omega}$, I – tröghetsmoment

$I_{sfär} = \frac{2mR^2}{5}$ $(= I_{xx} = I_{yy} = I_{zz})$

$s = \frac{1}{2}\hbar$

Här är $\vec{L} = \vec{s} \Rightarrow \vec{s} = \frac{2mR^2}{5}\omega\hat{z} \Rightarrow \underline{\underline{\omega R^2 = \frac{5|\vec{s}|}{2m}}}$ (2)

c) Insättning (2) i (1):

$$\mu = \frac{e\,5|\vec{s}|}{5 \cdot 2m} = \frac{e}{2m}|\vec{s}|$$

Kvantmek. $s = m_s\hbar$

$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_N}$

$\mu = g_s s\,\mu_N$

$g_s = 5{,}6$ (p) spinn g-faktor

$g_s = -3{,}8$ (n) $= 2$ för punktpartikel

18a α-sönderfall

(01a)

$${}^{A}_{Z}X_{N} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2} + \alpha$$

(Energikonservering ger
(moderkärna i vila, T = kin. energi för sönderfallsprod.)
$m_x c^2 = m_Y c^2 + T_Y + m_\alpha c^2 + T_\alpha$)

Q-värdet för sönderfallet

$$Q = (m_x - m_Y - m_\alpha)c^2 = T_Y + T_\alpha$$

kärnmassor! Går även med atommassor!

$${}^{247}_{97}Bk \longrightarrow {}^{243}_{95}Am + \alpha$$

Berkelium Americum (Americium på svenska)

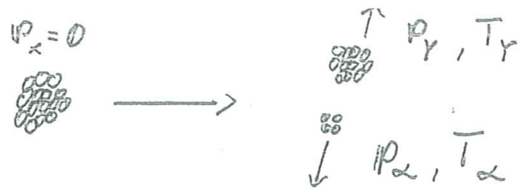
$$Q = [m({}^{247}Bk) - m({}^{243}Am) - m({}^{4}He)]c^2 =$$

$$= (247{,}070299 - 243{,}061372 - 4{,}002603)\,u \cdot c^2 = 6{,}324 \cdot 10^{-3}\ \underbrace{u \cdot c^2}_{931{,}494\ MeV} = \underline{\underline{5{,}89\ MeV}}$$

Am i brandvarnare

$\boxed{8.2a}$

(02a)



Finn T och v för dotterkärnan

Impulskonservering ger

$$\mathbb{P}_Y = -\mathbb{P}_\alpha \qquad \text{(om sönderfallet sker från vila)}$$

$$\underset{\sim 5\,MeV}{Q} \ll m_Y c^2, \underset{3726\,MeV}{m_\alpha c^2} \qquad \Rightarrow \text{Använd icke-rel. behandling} \checkmark$$

$$T = \frac{\mathbb{P}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow 2m_\alpha T_\alpha = 2m_Y T_Y$$

Med $Q = T_\alpha + T_Y \qquad \Rightarrow Q - T_Y = \frac{m_Y}{m_\alpha} T_Y$

$$\Rightarrow \quad T_Y = \frac{Q}{1 + \frac{m_Y}{m_\alpha}}$$

$$T(^{243}Am) \left(= \frac{Q}{1 + \frac{m(^{243}Am)}{m_\alpha}} \right) \approx \frac{5{,}89\ MeV}{1 + \frac{243}{4}} \approx 95{,}4\ keV$$

↑ Kvot (ej så många decimaler)

$\therefore T_\alpha = Q - T_Y = 5{,}79\,MeV = \,= 98\%$

$$v(^{243}Am) = \sqrt{\frac{2T(^{243}Am)}{m(^{243}Am)}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 95{,}4 \cdot 10^{-3}\,MeV}{243\,u}} = \left\{ 1u = 931{,}5\ \frac{MeV}{c^2} \right\}$$

↑ återigen kvot!

$$\approx \sqrt{\frac{2 \cdot 95{,}4 \cdot 10^{-3}\ MeV}{243 \cdot 931{,}5\ MeV/c^2}} \simeq 9{,}18 \cdot 10^{-4} c = 2{,}7 \cdot 10^5\ m/s$$

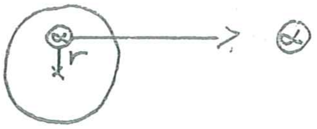
↑ OK med icke-rel

8.15 (04)

Semiklassisk behandling

Blandar friskt
Kvant. när vi kan.

a/



$Q = 6\ \mathrm{MeV}$
$A \approx 230$

$$T_\alpha = \frac{Q}{1+\frac{m_\alpha}{m_Y}} \simeq \frac{6\ \mathrm{MeV}}{1+\frac{4}{230}} \approx 5{,}897\ \mathrm{MeV}$$

$$p_\alpha = \sqrt{2 m_\alpha T_\alpha} \simeq \sqrt{2 \cdot 3727{,}4\ \mathrm{MeV}/c^2 \cdot 5{,}897\ \mathrm{MeV}} \simeq 209{,}6\ \frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

$$L = r p_\alpha \Rightarrow r = \frac{L}{p_\alpha} = \frac{\sqrt{l(l+1)\hbar^2}}{p_\alpha}$$

Använd $\hbar c = 197{,}3\ \mathrm{MeV\,fm}$
$p_\alpha = 209{,}6\ \mathrm{MeV}/c$

$$\Rightarrow r = 0{,}941\sqrt{l(l+1)}\ \mathrm{fm}$$

$\therefore\ l=1 \Rightarrow r = 1{,}33\ \mathrm{fm}$

$l=2 \Rightarrow r = 2{,}31\ \mathrm{fm}$

~~b/ Hela rekylen går till rotationsenergi hos dotterkärnan~~

$$\cancel{T_{rot} = Q - T_\alpha = (6-5{,}897)\ \mathrm{MeV} = 0{,}103\ \mathrm{MeV}}$$

$$\cancel{T_{rot} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J}{2}\left(\frac{L}{J}\right)^2 = \frac{L^2}{2J}}$$

$$\cancel{J = \frac{2}{5} M R^2}$$

$$\cancel{M = 226 \cdot 931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2}$$

$$\cancel{R = 1{,}25 \cdot 226^{1/3}\ \mathrm{fm}}$$

$$\cancel{T_{rot} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\cdot\frac{2}{5}MR^2} \Rightarrow l = 4{,}6}$$

Niklas 1

E1. Härled tvärsnittet för Rutherfordspridning.

A1. Från ett ursprungligen rent prov av ^{139}Cs, med aktiviteten 1 mCi, observeras sönderfallskedjan $^{139}\mathrm{Cs} \rightarrow {}^{139}\mathrm{Ba} \rightarrow {}^{139}\mathrm{La}$. Halveringstiden är 9.5 min för ^{139}Cs och 82.9 min för ^{139}Ba medan ^{139}La är stabil. Hur stor är den maximala bariumaktiviteten och när inträffar den? (K6.13)

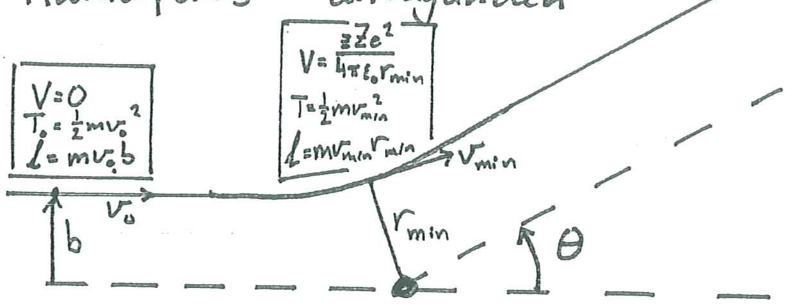
A8. Då reaktorhaveriet i Tjernobyl hade inträffat var de sovjetiska myndigheterna till en början inte villiga att erkänna vad som hänt. Det radioaktiva nedfallet från det stoftmoln som passerade Sverige någon dag efter haveriet, gav möjlighet att bevisa att en reaktorolycka inträffat genom att påvisa förekomsten av radioaktiva jodisotoper. Den relativa aktiviteten gav dessutom en ganska exakt bestämning av tidpunkten för olyckan. Utbytet för bildande av olika isobarer vid fission med termiska neutroner av ^{235}U fås ur nuklidkartan. Relativa aktiviteten av ^{133}I ($t_{1/2}$ = 20.8 h) och ^{131}I ($t_{1/2}$ = 8.02 d) i det prov som togs i närheten av Chalmers uppmättes måndagen den 28/4 kl. 17.00 till 270 mBq respektive 1000 mBq. Bestäm tidpunkten för reaktorhaveriet i Tjernobyl. (T990531:2)

E1 Rutherfordspridning

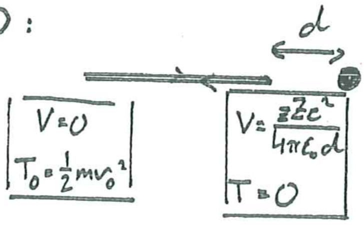
Härled tvärsnittet för Rutherfordspridning

Lösning Tvärsnitt är ett mått på sannolikheten för att en reaktion skall få ett visst utfall.
I vårt fall: sannolikheten för att en laddad partikel sprids vinkeln θ i kollisionen med en annan laddad partikel.

- Rutherfords antaganden



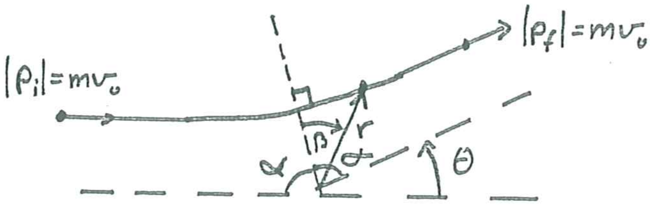
Om $b=0$:

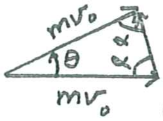


$$\Rightarrow d=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 T_0} \qquad (1)$$

- Samband mellan b & θ

Ändring i rörelsemängd





$\Delta p=2mv_0\sin\frac{\theta}{2}$ (

(riktad längs $\beta=0$)

Newton II:

$$\Delta p=\int dp=\int F\,dt = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dt}{r^2}\cos\beta$$

endast komponenten längs $\beta=0$ ger något bidrag

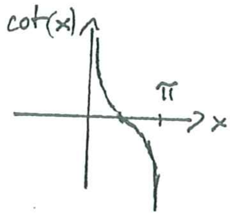
Konservering av rörelsemängdsmoment

$$mv_0 b = l = |m\vec{r} \times \vec{v}| = \left|mr\hat{r} \times \left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\beta}{dt}\hat{\beta}\right)\right| = mr^2\frac{d\beta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{r^2} = \frac{d\beta}{bv_0}$$

$$\therefore \; \Delta p = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 v_0 b}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\beta\, d\beta = \left\{\begin{array}{l} 2\alpha = \pi - \theta \\ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi-\theta}{2} \end{array}\right\} = \frac{zZe^2}{2\pi\varepsilon_0 v_0 b}\cos\frac{\theta}{2} \quad (3)$$

$$(1)-(3) \Rightarrow \boxed{b = \frac{d}{2}\cot\frac{\theta}{2}} \quad (4)$$



(b litet $\Leftrightarrow$ θ stort ok!)

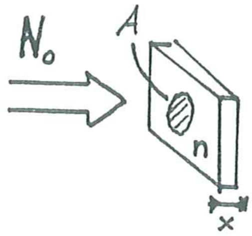
Tvärsnitt

Inför tvärsnitt = mått på reaktionssannolikhet uttryckt i en effektiv area

Antag att:

strålmålet har $\begin{cases} n & - \text{ kärnor per volymsenhet} \\ x & - \text{ tjocklek (tunn} \Rightarrow \text{ingen skuggning)} \end{cases}$

strålen har $\begin{cases} N_0 & - \text{ antalet inkommande partiklar} \\ A & - \text{ arean som bestrålas} \end{cases}$

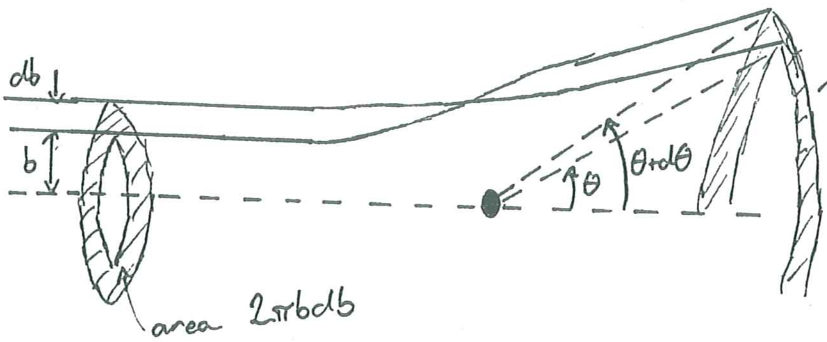


Definiera differentiellt tvärsnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ = slh, uttryckt i effektiv area, att en inkommande partikel sprids till rymdvinkeln $d\Omega$ från en kärna i strålmålet

∴ Om vår detektor upptar rymdvinkeln $d\Omega_{det}$ kommer dN_{det} partiklar att träffa den:

$$dN_{det} = \left(N_0 \cdot n \cdot x \, \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega_{det} \qquad (5)$$

I vårt fall: Hur många partiklar sprids mellan $[\theta, \theta + d\theta]$?



Rymdvinkel

$$d\Omega_{det} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

⟹ Antalet partiklar som träffar $d\Omega_{det}$

$$dN_{det} = N_0 \cdot (n \cdot x \cdot A) \cdot \frac{2\pi b \, db}{A} = \left\{ \begin{array}{l} \left|\frac{db}{d\theta}\right| = + \frac{d}{4} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ \cot\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{array} \right\}$$

$$= N_0 \cdot n \cdot x \cdot \frac{d^2}{16} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} 2\pi \sin\theta \, d\theta \qquad (6)$$

Jämför (5) & (6)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega}}} = \frac{d^2}{16} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \overset{(1)}{=} \underline{\underline{\left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4T_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}}$$

Rutherford

Geiger och Marsden (1911 -) konfirmerade att

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \begin{cases} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \\ T_0^{-2} \\ Z^2 \end{cases}$$

Ju större θ desto större måste Δp vara
=> måste känna stark kraft
=> måste komma nära kärnan => sällan stor T_0 behövs

(typiskt för EM vxv)

Antaganden :

1. OK
2. OK för spridning av α-partiklar o. dyl. eftersom elektronerna är för lätta för att åstadkomma stor θ spridning
3. Kan lätt korrigeras genom att byta $m \to \mu = \frac{mM}{m+M}$, dvs transformera till CM-systemet (centre of mass)

4. & 5. OK om partiklarna inte kommer så nära kärnan att den starka kraften börjar verka (dvs $d \sim 10\,fm$
Effekt av laddningsfördelning => Formfaktor

6. Inelastisk spridning existerar om energin på de inkommande partiklarna är tillräckligt stor

7. I detta fall ger en kvantmekanisk härledning samma svar (speciellt för $1/r^2$ -krafter)
Kvantmekanik måste användas när man
   - tar hänsyn till laddningsfördelningen
   - inkluderar partiklarnas spinn

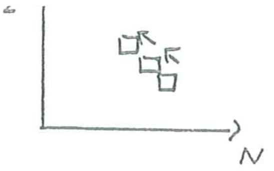
För elektronspridning måste vi dessutom ta hänsyn till relativistiska effekter.

$\boxed{6.13}$

(1)

$\boxed{A1}$

$$ {}^{139}_{55}Cs \xrightarrow[9{,}5\,min]{\beta^-} {}^{139}_{56}Ba \xrightarrow[82{,}9\,min]{\beta^-} {}^{139}_{57}La $$



Låt index 1 stå för Cs, 2 för Ba, 3 för La (Lantanum)

$N_j(t)$ = # atomer av sort j vid tid t

$$ t=0: \quad \begin{cases} N_1(0) = N_0 \\ N_2(0) = 0 \\ N_3(0) = 0 \end{cases} $$

$$ dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt \qquad (1) $$

Notera: infinitesmå delen

$$ dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt \qquad (2) $$

(1) har lösningen $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$

Ansatz

$$ N_2(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t} $$

$N_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$

Insättning i (2) ger

$$ A(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \cancel{\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}) = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 A(e^{-\lambda_1 t} - \cancel{e^{-\lambda_2 t}}) $$

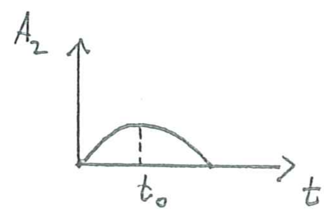
$$ \Rightarrow \quad A = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} $$

$$ \therefore \quad N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \qquad (6.31) $$

Aktiviteten anger # sönderfall/tidsenhet $\quad A(t) \equiv \lambda N(t)$

$$ \Rightarrow A_2(t) = \lambda_2 N_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \qquad (6.32) $$

$$ = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \qquad (*) $$



$A_2(t)$ har ett maximum vid $t = t_0$

forts
6.13

$$\left.\frac{dA_2(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_0} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_0} \qquad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \qquad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{\frac{\ln 2}{82,9} - \frac{\ln 2}{9,5}} \ln\left(\frac{9,5}{82,9}\right) \text{ (min)} = \underline{\underline{33,5 \text{ (min)}}}$$

Aktiviteten ?

$$A_1(0) = 1\,\text{mCi}$$

$$\left[1\,\text{Ci} = \frac{\#\ \text{sönderfall}}{\text{s}} \text{ från } 1\,\text{g Ra}\right] = 3,7\cdot 10^{10}\,\text{Bq}$$

$$1\,\text{Bq} = \frac{1\ \text{sönderfall}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \quad A_2|_{max} = A_2(t_0) \overset{*}{=} 1\,\text{mCi} \, \frac{\frac{1}{82,9}}{\frac{1}{82,9} - \frac{1}{9,5}} \left(e^{-\frac{\ln 2 \cdot 33,5}{9,5}} - e^{-\frac{\ln 2\cdot 33,5}{82,9}}\right) = \underline{\underline{87\,\mu\text{Ci}}}$$

$$= 3,22\,\text{MBq}$$

990531-2

(8) AB

I Williams

Aktivitet = I
Sönderfallsk. = ω
Utbyte = P

Den 28/4 1986 kl 17:00 uppmättes aktiviteterna

270 mBq från ^{133}I
1000 mBq från ^{131}I i ett prov

i Göteborg.

Bestäm tidpunkten för Tjernobylolyckan

(Antag att I-aktiviteten vanligtvis ≈ 0)

Lösning Vid fission, med termiska neutroner, av ^{235}U bildas bl.a. ^{133}I och ^{131}I. Utbytet för olika isobarer ges av bilaga 1.

Beteckna

$A_{133}(t)$ - aktiviteten från ^{133}I vid tiden t
$A_{131}(t)$ - -"- ^{131}I -"-

Utbytet ∝ aktiviteten [ty $A(t') = U(1 - e^{-\lambda t'}) \to U$ då $t' \to \infty$]

$$\Rightarrow \frac{A_{133}(0)}{A_{131}(0)} = \frac{6{,}609}{2{,}885}$$

$$\begin{cases} A_{133}(t) = A_{133}(0)\, e^{-\lambda_{133} t} & , t_{1/2,133} = 20{,}8 \text{ h} \\ A_{131}(t) = A_{131}(0)\, e^{-\lambda_{131} t} & , t_{1/2,131} = 8{,}02 \text{ d} = 192{,}48 \text{ h} \end{cases}$$

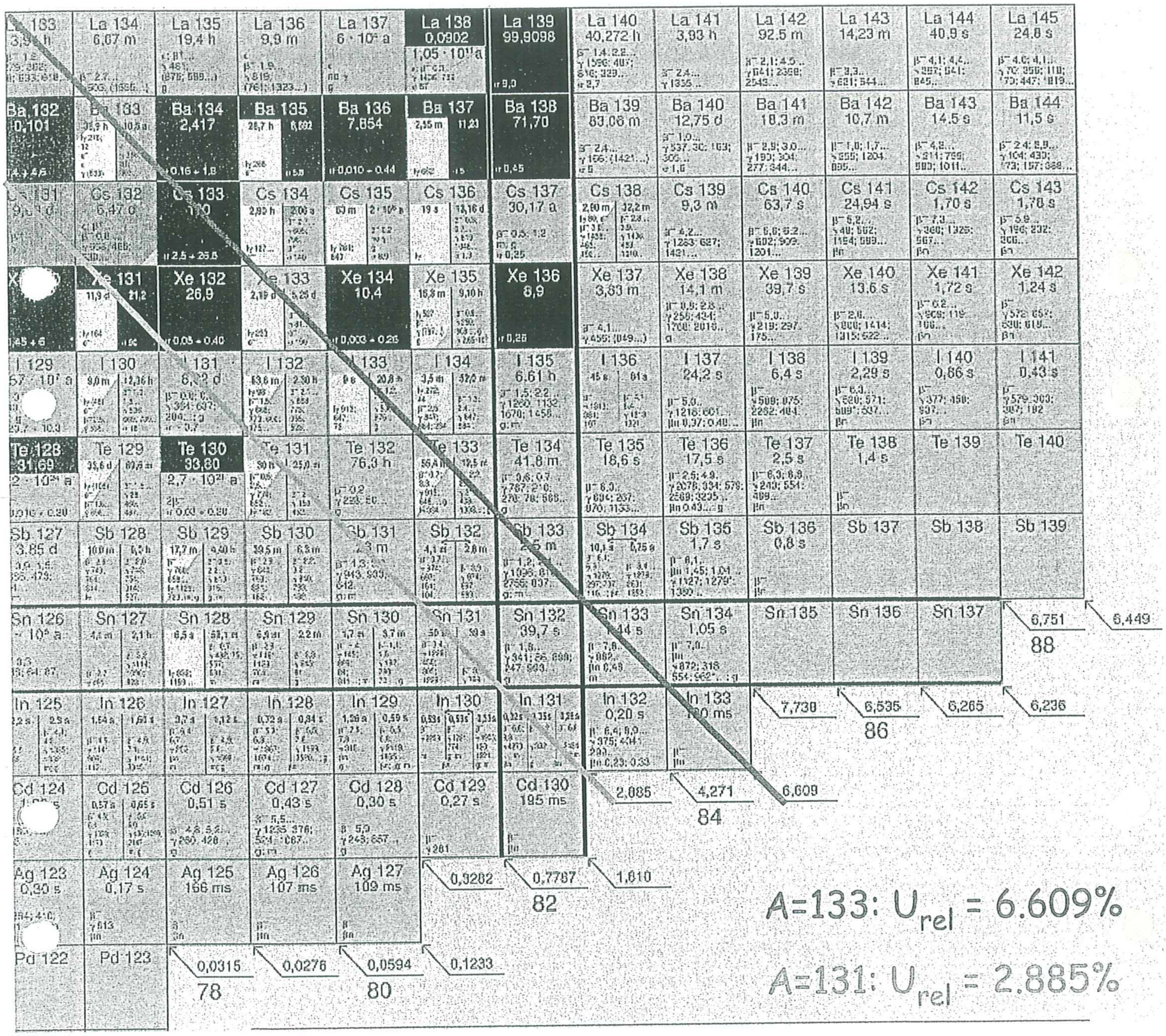
Aktiviteten vid tiden T efter olyckan är uppmätt

$$\frac{A_{133}(T)}{A_{131}(T)} = \frac{A_{133}(0)}{A_{131}(0)}\, e^{(\lambda_{131} - \lambda_{133})T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln\left(\frac{270}{1000} \cdot \frac{2{,}885}{6{,}609}\right)}{\ln 2\left(\frac{1}{t_{1/2,131}} - \frac{1}{t_{1/2,133}}\right)} = 72 \text{ h}$$

∴ 25/4 kl. 17:00

A8



$A=133$: $U_{rel} = 6.609\%$

$A=131$: $U_{rel} = 2.885\%$

"Isobaric yield for ^{235}U fission with thermal neutrons. (%)"

Se också Physics Handbook tabell T6.7.