TENTAMEN I FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK F3/KF3 – FFY011 och FYP330-GU

Tid: **2013-03-12 kl. 14.00**
Lokal: **VV- salar**

Hjälpmedel: Physics Handbook, egen formelsamling på ett A4-blad (fram- och baksidan), typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inprogrammerad text eller ekvationer av intresse för tentan.

Kursbetyget är baserat på summan av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är: 10p≤3<14p, 14p≤4<17p, 5≥17p. Granskning: 28/3 kl 12-13 i F5002.

lärare:

Igor Zoric	**tel: 3371, 0708 30 47 25**
Mats Granath	
Bo Hellsing	**tel: 0702 240925**

Uppgift 1

Röntgenstrålningen (vågländen λ=3,2Å) infaller i [100]-riktningen på en ytcentrerad kubisk kristall och man observerar dess första diffraktionsmaximum i [122]-riktningen.

Beräkna gitterparametern för kristallen. (4p)

Uppgift 2

En endimensionell jonisk kristall består av en kedja av 2N joner (N>>1) med alternerande laddningar (+q, -q) (se Fig. 1). Utöver Coulombväxelverkan finns en repulsiv växelverkan, A/R^n, som agerar bara mellan närmsta grannar (R är avståndet mellan närmsta grannjonerna). (Obs: A, q, och n anses vara kända).

a) Beräkna avståndet R_o mellan närmsta grannar när kristallen befinner sig i jämvikt. (2)

b) Beräkna den kohesiva energin för kristallen. (2)

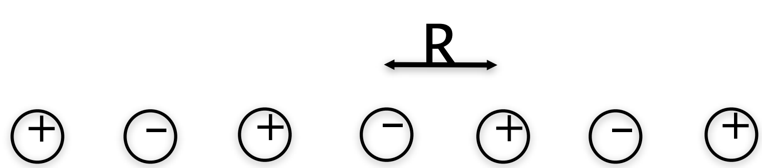


Fig. 1 Endimensionell kristall som består av alternerande joner

Uppgift 3

En halvledare har ett ledningsband med energi $E_c + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{0.2 m_e}$. Betrakta en elektron i ledningsbandet som vid tiden $t = 0$ har vågtal $\vec{k} = 0.1 \mathring{A}^{-1} \hat{x}$ och påverkas av ett magnetfält $\vec{B} = 0.1 T \hat{z}$.

a) Beskriv (i ord eller bild) hur elektronen rör sig. (1p)

b) Hur lång är periodtiden? (1p)

c) Vad är hastigheten vid tiden $t = 0$? (1p)

d) Hur lång är banan i reella rummet? (1p)

Uppgift 4

Grafen har ett två-dimensionellt hexagonalt gitter med en bas bestående av två kolatomer. Respektive atom i basen kan identifieras med ett subgitter som vi kan kalla A och B. Låt oss välja gittervektorer $\vec{a_1} = a(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y})$ och $\vec{a_2} = a(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y})$, och basen $\vec{0}$ och $\frac{a}{\sqrt{3}}\hat{x}$, där a är gitterparametern.

a) Rita några enhetsceller av kristallen där atomer i subgitter A respektive B är markerade. (1p)

b) Ta fram reciproka gittervektorer och rita första Brillouinzonen. (1p)

c) Antag att bandstrukturen beskrivs av en tight-binding model med endast överlapp mellan vågfunktioner på närmaste grannatomer, d.v.s. mellan atomer på subgitter A och subgitter B. (Bortse från det konstanta energibidraget från överlappet av en vågfunktion med sig själv.)

Antag också att Fermienergin är $\epsilon_F = 0$ och visa att Fermiytan bara består av ett diskret antal punkter i första Brillouinzonen och identifiera dessa punkter. (2p)

Tips: leta efter värden på $\vec{k} = (k_x, k_y)$ sådana att $\epsilon_{\vec{k}} = 0$ utan att nödvändigtvis räkna ut det fullständiga utttrycket för $\epsilon_{\vec{k}}$.

Uppgift 5

Betrakta en en-dimensionell ferromagnet bestående av N spinn-$\frac{1}{2}$ med gitterparameter a och växelverkansenergi J. Excitationerna från grundtillståndet är magnoner med energi (relativt grundtillsåndet) $\epsilon_k = J(1 - \cos ka)$. Eftersom en magnon svarar mot ett tillstånd med lägre magnetisering kan man skriva magnetiseringen enligt $M = 2\mu_B(N/2 - \sum_k n_k)$, där n_k är det termiska väntevärdet av antalet magnoner i tillstånd k.

a) Det finns ett teorem (Mermin-Wagner) som säger att ett ferromagnetiskt tillstånd inte är möjligt i en dimension vid ändlig temperatur ($T \neq 0$). Bekräfta detta påstående genom att visa att antalet magnoner för den en-dimensionella ferromagneten divergerar. (2p)

Tips:
1. Magnoner är (på samma sätt som fononer) bosoner.
2. Antag låg temperatur, $k_B T \ll \pi/a$, för att förenkla dispersionen, ϵ_k.

b) Vad säger motsvarande räkning i 2D respektive 3D? (1p)

b) Betrakta fononer istället för magnoner. Vad kan det säga om stabiliteten hos en en-dimensionell atomkedja? (1p)

Lycka till!
Igor och Mats

Tentamen i FTF, 2013 03 12 – Lösningar

1) $\vec{k} = k(1,0,0)$ där $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 3.2\,\mathring{A}$

$\vec{k}' = \frac{1}{3}k(1,2,2)$

(Diffraktion är en elastisk process $\Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'|$)

$|\vec{k}'| = \frac{1}{3}k\sqrt{1^2+2^2+2^2} = \frac{1}{3}k \cdot 3 = k = |\vec{k}|$ ✓

Laue diffraktions villkor:

$$\Delta\vec{k} = \vec{G}_{hkl}$$
$$|\vec{k}| = |\vec{k}'|$$

Strategi: Räkna $\Delta\vec{k} = \vec{k}' - \vec{k}$. Tag framm $\vec{G}_{hkl}$ för fcc gitter.

$$\Delta\vec{k} = \vec{k}' - \vec{k} = \frac{1}{3}k(1,2,2) - k(1,0,0) = \frac{2}{3}k(-1,1,1)$$

Nu skall vi hitta $\vec{G}_{hkl}$ (kortaste $\Rightarrow$ först max) som är lika med $\Delta\vec{k}$

fcc: Primitiva trans. vektorer för reelt gitter:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \tfrac{1}{2}a(\hat{y}+\hat{z}) = \tfrac{1}{2}a(0,1,1)\\ \vec{a}_2 &= \tfrac{1}{2}a(\hat{x}+\hat{z}) = \tfrac{1}{2}a(1,0,1)\\ \vec{a}_3 &= \tfrac{1}{2}a(\hat{x}+\hat{y}) = \tfrac{1}{2}a(1,1,0)\end{aligned}\right\}$$ se Kittel, s 37 ekv. 34

Primitiva trans. vektorer för reciprokt gitter:

$$\left.\begin{aligned}\vec{b}_1 &= \tfrac{2\pi}{a}(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) = \tfrac{2\pi}{a}(-1,1,1)\\ \vec{b}_2 &= \tfrac{2\pi}{a}(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}) = \tfrac{2\pi}{a}(1,-1,1)\\ \vec{b}_3 &= \tfrac{2\pi}{a}(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}) = \tfrac{2\pi}{a}(1,1,-1)\end{aligned}\right\}$$ se Kittel, s 38, ekv. 36

$\vec{G}_{hkl} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ dvs

vi ser att $\vec{G}_{100} = \vec{b}_1 = \Delta\vec{k}$

$$\Delta\vec{k} = \vec{b}_1$$
$$\frac{2}{3}k(-1,1,1) = \frac{2\pi}{a}(-1,1,1)$$
$$\frac{2}{3}k = \frac{2\pi}{a}$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{3\lambda}{2} = \underline{\underline{4.8\,\mathring{A}}}$$

② ②

a) $$E = 2N \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{q^2}{R\cdot j} + 2N\frac{A}{R^n}$$

$$E = 2N\left\{-\frac{q^2}{R}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)}_{\ln 2}\right. + 2N\frac{A}{R^n}$$

se Kittel s. 64

$$E = 2N\left\{-\frac{q^2}{R}\ln 2 + \frac{A}{R^n}\right\}$$

i jämvikten $E = \min \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial R} = 0 \Rightarrow R_0$

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 2N\left\{\frac{q^2}{R^2}\ln 2 - n\frac{A}{R^{n+1}}\right\} = 0 \Rightarrow R_0 = \left(\frac{nA}{q^2\ln 2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

b) $$E_{min} = E(R_0) = 2N\left\{-q^2\ln 2\left(\frac{q^2\ln 2}{nA}\right)^{\frac{1}{n-1}} - A\left(\frac{q^2\ln 2}{nA}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right\}$$

$$E_{min} = E(R_0) = -2N\ln 2\cdot q^2\frac{1}{R_0}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Tenta 130312
fasta tillst. fysik

Uppg. 3

$E_c + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{0.2 m_e} \Rightarrow m^* = 0.1 m_e$

a) Elektronen rör sig en cirkel i x-y planet

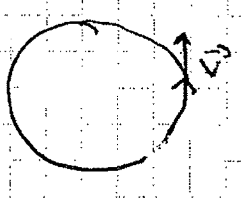
b) Vinkelfrekvensen är $\omega_c = \frac{eB}{m^*} = 1.76 \cdot 10^{11}\ s^{-1}$

$\Rightarrow$ periodtid $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 3.57 \cdot 10^{-11}\ s}$

c) $\vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*} = 1.15 \cdot 10^{5}\ m/s$

d) Beloppet på hastigheten $|\vec{v}| = v$ är konstant

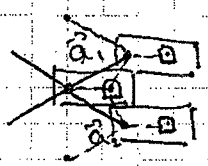
$\Rightarrow$ längden på banan

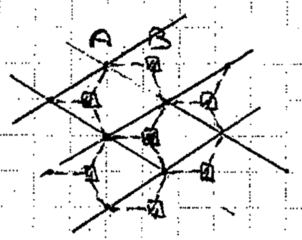


$$\boxed{L = Tv = 4.12 \cdot 10^{-6}\ m}$$

Uppg. 4 $\vec{a}_1 = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$ $\vec{a}_2 = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right)$

a)





A = pricker

B = fyrkanter

b) reciprokt gitter: $\vec{b}_1$; $\vec{b}_2$:

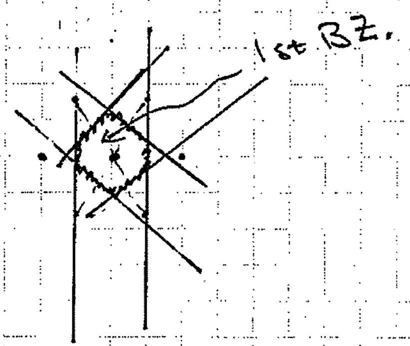
$\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ $\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 = 0$

ansats: $\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 = 2\pi$ $\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 = 2\pi$

$\vec{b}_1 = b\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}\right) \Rightarrow \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$

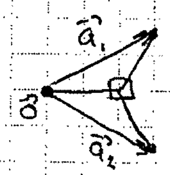
$2\pi = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow b = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}\right)$

P.S.S $\vec{b}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\left(\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}\right)$



c) Tight-binding:

betrakta en B-atom + grannar:



tillstånd med energi = 0 om

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{0}} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_2} = 0$$

$$1 + e^{ik_x a\frac{\sqrt{3}}{2} + ik_y a\frac{1}{2}} + e^{ik_x a\frac{\sqrt{3}}{2} - ik_y a\frac{1}{2}}$$

$$1 + e^{ik_x a\frac{\sqrt{3}}{2}}\, 2\cos\tfrac{1}{2}k_y a$$

real och imaginärdel

$$\Rightarrow \quad \sin k_x a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\tfrac{1}{2}k_y a = 0$$

$$1 + 2\cos k_x a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\tfrac{1}{2}k_y a = 0$$

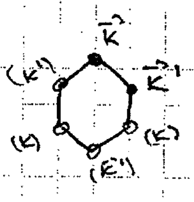
$\therefore$ vi behöver $\sin k_x a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow k_x = \underbrace{\text{heltal}}_{n}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}}\cdot\pi$

$k_x = 0 \ (n=0) \Rightarrow 1 + 2\cos\frac{k_y a}{2} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{4\pi}{3a}$

$k_x = \frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \Rightarrow 1 - 2\cos\frac{k_y a}{2} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{2\pi}{3a}$

2 pkter: $\vec{K} = \left(0, \frac{4\pi}{3a}\right)$ och $\vec{K}' = \left(\frac{2\pi}{a\sqrt{3}}, \frac{2\pi}{3a}\right)$

På BZ.



(andra punkter är ekvivalenta med reciproka gittervektorer)

Uppg. 5

a) $n_k = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_k} - 1} \approx \frac{1}{e^{\beta \frac{1}{2} J a^2 k^2} - 1}$ för $\boxed{\beta \gg \varepsilon_{\pi/a}^{-1}}$

$$\sum_k n_k = \frac{L}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} n_k \, dk \approx \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta \frac{1}{2} J a^2 k^2} - 1} dk =$$

$$= \left[x = \tfrac{1}{2} J \beta a^2 k^2 \quad dx = J \beta a^2 k \, dk \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{L}{2\pi} \frac{2}{J\beta a^2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} J \beta a^2}}_{\left(\sim N \sqrt{k_B T / J}\right)} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(e^x - 1)}}_{\text{för små } x \ \sim \frac{1}{\sqrt{x} \cdot x} = \frac{1}{x^{3/2}}} \rightarrow \infty$$

v.s.v.

b) i 2D : tillståndstätheten $\sim$ konst.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} \rightsquigarrow \ln 0 \quad \text{också divergent}$$

3D $\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^x - 1}$ konvergent

2D : inget ferromagnetiskt tillstånd för $T \neq 0$

3D : ferromagnetisk ordning OK

c) fononer, dispersion för små energier

$$\varepsilon \sim \hbar v k \Rightarrow D(\varepsilon) \sim \text{konst.}$$

$\sum_k n_k \rightsquigarrow \infty$ logaritmiskt (som 2D ovan)

$\therefore$ 1D kristall är instabil.
p.g.a divergerande fononantal