

## TENTAMEN I FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK F3/KF3 – FFY011

**Tid: 2012-08-24 kl. 08.30**

**Lokal: VV- salar**

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, egen formelsamling på ett A4 blad (fram och baksidan), typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inprogrammerad text eller ekvationer av intresse för tentan.

**Kursbetyget** är baserat på summan av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är:  $10p \leq 3 < 14p$ ,  $14p \leq 4 < 17p$ ,  $5 \geq 17p$ . Granskningen: 13/9 kl 12-13 i F5002.

**Examinatorer:**

Igor Zoric                      tel: 031 772 3371, 0708 30 47 25

Mats Granath                 tel: 031 786 9026, 0766 229026

**Uppgifter:**

1. Den en sällsynta jordartsmetallen ytterbium(Yb) har fcc kristallstruktur med den kubiska gitterparametern  $5,48 \text{ \AA}$ .

a) Hur stort är planavståndet mellan de planskaror som ges av Millerindex (121) i den kubiska enhetscellen hos Yb? (1p)

b) Ett polykristallint prov av Yb skall analyseras med hjälp av röntgendiffraktion och man vill använda röntgenstrålar med våglängden  $1,54051 \text{ \AA}$ . Vid vilka vinklar ser man de 5 första topparna? (3p)

2. Figuren nedan visar fonondispersionsrelationen för Yb vid temperaturen  $295^{\circ}\text{K}$ , uppmätt i ett antal olika riktningar i en Yb enkristall. Med hjälp av uppmätta fonondispersionsrelationen och informationen i figurtexten beräkna:

a) Vågtalet för BZ-gränsen i L-riktningen för Yb uttryckt i  $\text{m}^{-1}$ ? (1p)

b) I vilken av de tre riktningarna  $(\xi 0 0)$ ,  $(\xi \xi 0)$  respektive  $(\xi \xi \xi)$  är ljudutbredningsfarten för longitudinella vågor störst? Det krävs en uträkning av ljudfarten i vardera fallet för full poäng på uppgiften (1p)

c) Uppskatta Debytemperaturen  $\theta_D$  för Yb ur fonondispersionsrelationen? (1p)

d) Vad är ett rimligt värde på värmekapaciteten för Yb vid 3 K respektive vid 30 K? (1p)

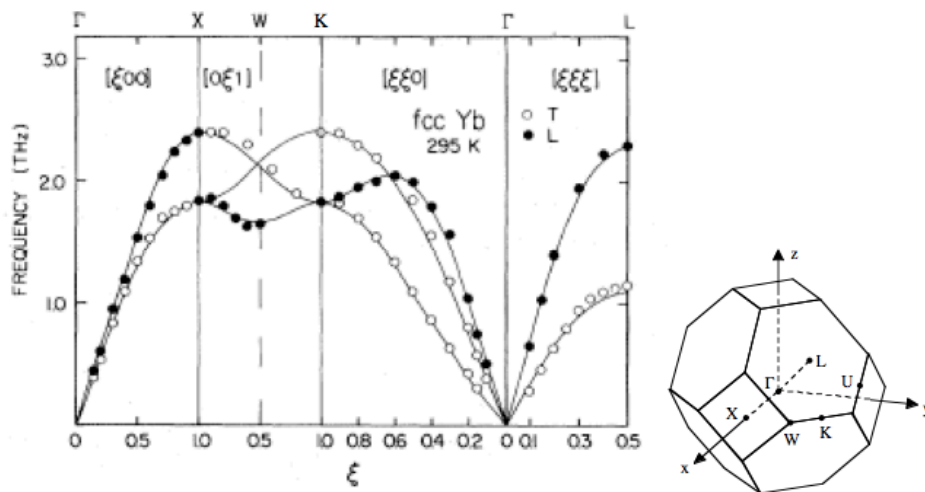
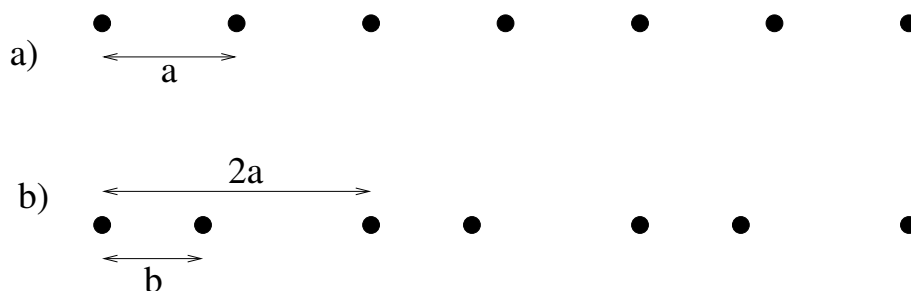


Fig. 1: Fonondispersionsrelationen för Yb vid temperaturen 295 K uppmätt i ett antal olika riktningar i en enkristall (punkterna i figuren är mätvärden från inelastisk neutronspridning och linjerna i figuren är värden från teoretiska beräkningar av fonondispersionsrelationen). Bokstaven  $\Gamma$  är origo i reciproka rummet och de övriga bokstäverna motsvarar punkter på ytan av 1:a Brillouin-zon till ett fcc-gitter, vilken visas i figuren till höger. Alla avstånd i fonondispersionsrelationen är valda så att  $\xi = 1$  är ett avstånd i reciproka rummet på  $2\pi/a$ . Ofyllda cirklar anger transversella akustiska fononer och fyllda cirklar anger longitudinella akustiska fononer.

### Uppgift 3

Betrakta ett en-dimensionellt material bestående av ett regelbundet gitter (en kedja) av atomer på avstånd  $a$ .



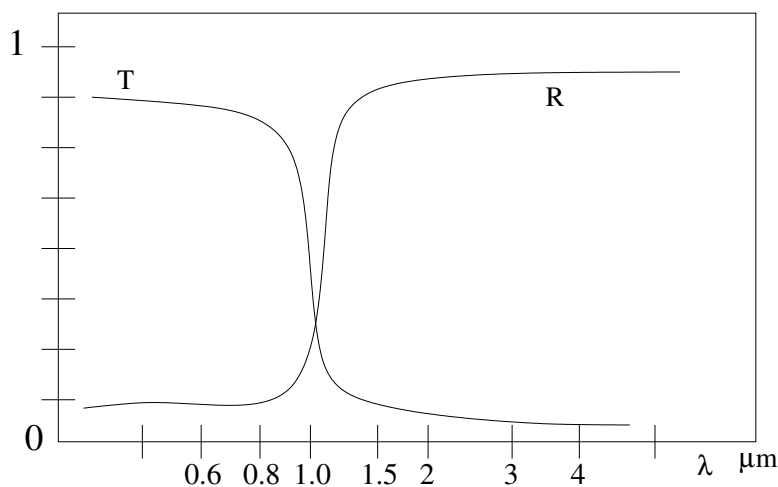
a) Med utgångspunkt i frielektronapproximationen skissa bandstrukturen för materialet under förutsättning att gitterpotentialen är svag. Rita de tre lägsta banden i första Brillouin-zonen. (2p)

b) Under vissa förutsättningar kan en instabilitet uppstå i materialet som gör att atomerna parvis attraheras mot varandra. Skissa hur bandstrukturen förändras. (1p)

c) Kvalitativt, hur ändras fonospektret mellan situation (a) och (b)? (1p)

### Uppgift 4

Figuren är en skiss över reflektans (R) och transmittans (T) hos ett tunt skikt av halvledaren  $\text{In}_2\text{O}_3$ . Denna har ett bandgap  $E_g = 3.5\text{eV}$  och effektiv massa för elektroner och hål,  $m_e = 0.3m$  respektive  $m_h = 0.7m$ .



a) Givet att den elektromagnetiska responsen helt domineras av elektroner så att hålets bidrag kan försummas, beräkna elektrontätheten i materialet. (Man kan anta att materi-

alet har hög mobilitet, d.v.s. stor relaxationstid  $\tau$ .) (2p)

b) Beräkna elektrontäthet under antagandet att materialet är en intrinsisk halvledare. Är materialet intrinsiskt eller dopat? (1p)

c) Materialet är användbart för energieffektiva fönster, varför? (1p) (Det korrekta svaret kräver ett mått termodynamik.)

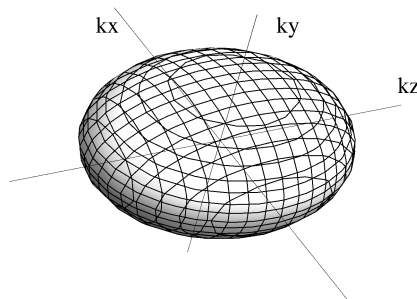
## Uppgift 5

Elektroner i ett magnetfält rör sig i banor med konstant energi, vilket ger en möjlighet att mäta effektiva massor för halvledare med hjälp av cyklotronresonans.

Antag att ledningsbandet för en halvledare vid låga energier har konstanta energikurvor som ges av en ellipsoid

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (ak_x^2 + bk_y^2 + ck_z^2)$$

där  $a = 2.0$ ,  $b = 3.0$ ,  $c = 1.0$ . (Skissat i figuren.)



Beräkna cyklotronfrekvensen  $\omega_c$  om magnetfältet är i z-led,  $\vec{B} = B\hat{z}$ , med  $B = 0.1\text{T}$ . (För full poäng krävs härledning av uttrycket.) (4p)

Tentamen i FTF - FTY011 120824 - Lösningar

1a) Yb - fcc struktur  $\equiv$  kubisk struktur  $\Rightarrow$

$$d(hkl) = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \Rightarrow d(121) = \frac{5.48}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \underline{2.24 \text{ \AA}}$$

1b) Polykristallint prov  $\Rightarrow$  Braggvillkoret kommer att kunna vara uppfyllt för samtliga möjliga reflexer.

För fcc-sitter är struktur faktorn:

$$S(hkl) = f(1 + e^{-i\pi(h+k)} + e^{-i\pi(k+l)} + e^{-i\pi(h+l)})$$

$S \neq 0$  om: alla hkl är udda eller alla hkl är jämna.

Pga:  $d = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \Rightarrow$  från Bragg's lag

$$2d(hkl) \sin \theta = \lambda \quad \text{eller}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a} \sqrt{h^2+k^2+l^2}\right)$$

hkl	$\sqrt{h^2+k^2+l^2}$	$\theta$
111	$\sqrt{3}$	14,09
200	2	16,33
220	$\sqrt{8}$	23,43
311	$\sqrt{11}$	27,79
222	$\sqrt{12}$	29,14
400	4	34,21
331	$\sqrt{19}$	37,78

första 5 toppar

2a) I  $L$ -riktningen har vi vågvektorn  $\vec{k} = 0.5 \cdot (\xi, \xi, \xi)$

eller  $\vec{k} = \frac{1}{2} (\xi, \xi, \xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a} \right)$

då  $\Rightarrow |\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{5.48 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{9.93 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}}}$

2b) Lydshastigheten i de olika riktningarna bestäms av lutningen av fonondispersionsrelationerna vid olika vågvektorantal.

$(\xi 0 0)$   $v = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{12}}{0.6 \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{5.48 \cdot 10^{-10}}} \approx 1830 \text{ m/s}$

$(\xi \xi 0)$   $v = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{12}}{0.4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2\pi}{5.48 \cdot 10^{-10}}} \approx 1930 \text{ m/s}$

$(\xi \xi \xi)$   $v = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{12}}{0.5 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{5.48 \cdot 10^{-10}}} = \underline{\underline{2530 \text{ m/s}}}$

2c)  $k_B \Theta_D = \hbar \omega_D \Rightarrow \Theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B}$

Ur figuren ser vi att högsta fononenergi i kristallen  $\hbar \omega_{\text{max}} = \hbar \omega_D \approx 2.4 \text{ THz}$

$\Rightarrow \Theta_D = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 2.4 \cdot 10^{12}}{1.38 \cdot 10^{-23}} \approx \underline{\underline{115 \text{ K}}}$

2d) fononernas bidrag vid  $T \ll \Theta_D$  ser ut

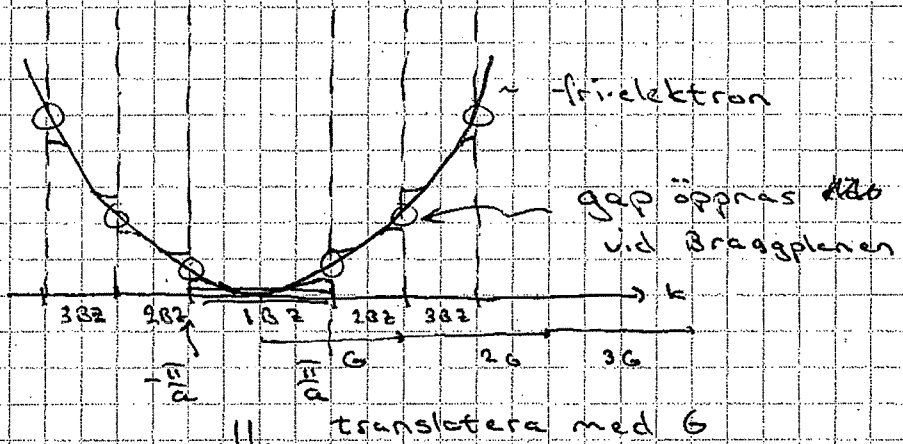
$$C_v \approx 234 N k_B \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3$$

för  $N = N_A \Rightarrow$  molens värmekapacitet

$C_v(30 \text{ K}) \approx 30 \text{ mJ/mol K}$

$C_v(30 \text{ K}) \approx \underline{\underline{30 \text{ J/mol K}}}$

Uppg B a) Reciprokt gittervektor:  $G = \frac{2\pi}{a}$



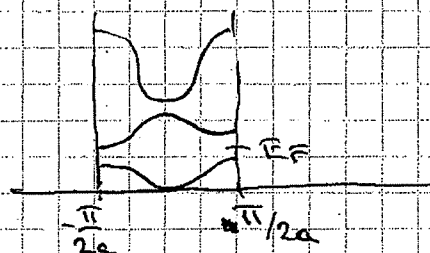
varje band kan ta två elektroner per k-punkt  
(och ~~alla~~ 2 elektroner per gitterpunkt)

bandet är halfullt

↑  
metall

b) Bandstrukturen är samma men

$$\text{nu är } G = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$$



nu har vi 2 elektroner per gitterpunkt

↓  
lågsta bandet är fullt

↑  
isolator

c) i a) finns endast akustiska fonon  $\omega(k) \stackrel{k \rightarrow 0}{\sim} 0$

i b) finns även en optisk mod  $\omega(k) \stackrel{k \rightarrow 0}{\rightarrow} \omega_0 > 0$

Uppg. 4 a) EM propagationen bestäms av

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\rho_e}{\epsilon_0 \omega^2} \quad (\text{för små } \vec{p} \text{ och } \omega \gg 1)$$

För att våg ska kunna propagera (T) krävs  $\epsilon_r > 0$ , dvs  $\omega > \omega_p$ .

Vi kan alltså identifiera droppet

vid  $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$  med  $\omega_p = 2\pi c / \lambda = 1.9 \cdot 10^{15}$

$\omega_p$  ges av  $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m^*}$   $\Rightarrow$

$$n = \frac{\epsilon_0 m^* \omega_p^2}{e^2} = 3.6 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

b) Intrinnsisk halvledare:  $n = p$

ur P.H.  $n_p = n_0 p_0 e^{-E_g / k_B T}$

$$n_0 / p_0 \approx 4.83 \cdot 10^{29} T^{-3/2} \left(\frac{m^*}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{2^3}$$

$$\therefore n = \sqrt{n_0 p_0} e^{-E_g / 2k_B T}$$

$$\approx 4.83 \cdot 10^{21} T^{-3/2} \left(\frac{m^*}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{m^*}{m}\right)^{3/4} e^{-E_g / 2k_B T}$$

$$\approx \left[ \text{antag rumtemp. } 20^\circ\text{C} \right]$$

$$\approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-3}$$

dvs kneppt några intrinnsiska laddningsbärare  $E_g \gg k_B T$

Materialet är dopat

c) (Termokommentaren i uppg. texten var inte viktig)  
~~Om ett material absorberar solstrålning så blir en del av energin kvar i det solsk. bld.~~

Som ett ytskikt på ett fönster släpper det igenom solstrålning ( $\omega > \omega_p$ ) men samtidigt reflekteras ~~strålar det inte ut~~ IR ( $\omega < \omega_p$ ) inifrån, dvs lägre värmeförluster.



Oppg. 5

a)

$$\vec{F} \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{T} = -e \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{R.F. for Blochfillet.}$$

der  $\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}$  grupphast.

$$\therefore \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \right) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_i \partial k_j} \frac{dk_j}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_i \partial k_j} \right) \vec{T}_i$$

for her  $\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (ak_x^2 - bk_y^2 + ck_z^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial k_x \partial k_x} = \frac{\hbar^2 a}{m} \text{ etc.}$$

$\vec{B} = B \hat{z}$

med  $\vec{v} = (v_x, v_y, 0) \Rightarrow \vec{T} = -eB (v_y, -v_x, 0)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{a}{m} eB v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{b}{m} eB v_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{ab}{m^2} e^2 B^2 v_x$$

med lösningen  $v_x = v_0 \cos \omega_c t$

$$\omega_c = \sqrt{ab} \frac{eB}{m} = \sqrt{6} \frac{eB}{m}$$

b)

En cykel:  $\Delta t = 2\pi / \omega_c$

ingen kollisjon (i genomsnitt)  $\Leftrightarrow \tau > \Delta t$

das  $\tau > \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \tau \omega_c > 2\pi \quad (\tau \omega_c \gg 1)$

$$\tau \sqrt{6} \frac{eB}{m} > 2\pi \Leftrightarrow B > \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \frac{m}{e\tau} = 0.015 \text{ T}$$

$$\boxed{B > 0.015 \text{ T} \text{ eller } B > 150 \text{ G}}$$