

TENTAMEN I FASTA TILLSTÅNDETS FYSIK F3/KF3 – FFY011

Tid: 2010-01-14-fm

Lokal: VV – salar

Hjälpmedel: Matematiska tabeller, Physics Handbook, TEFYMA, bifogad formelsamling, typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inlagd text eller ekvationer av intresse för tentamen. Däremot är det OK att i räknarens minne ha värden på naturkonstanter som Plancks konstant och elektronmassan. Kursbetyget är baserat på summan av tentamenspoängen +30 % av duggapoängen. Gränserna är: $9p < 3 < 14p$, $14p \leq 4 < 17p$, $5 \geq 17p$. Granskningen: 30/1. kl 13-15 i F5117.

Examinator: Igor Zoric
Jari Kinaret

tel: 3371, 0708 30 47 25

tel: 3668, 0706 45 72 68

1. Enhetscellen för högttemperatursupralederen $\text{Bi}_x\text{Sr}_y\text{Ca}_z\text{Cu}_w\text{O}_v$ visas i figuren nedan.

- Hur många Bi, Sr, Ca, Cu och O joner finns per enhetscell (1.5 p)?
- Bestäm den kemiska formeln för supralederen (1p)?
- Beräkna materialets täthet (om $a=b=5,4\text{\AA}$ och $c=37\text{\AA}$) (1,5 p)?
($1\text{amu}=1,66 \cdot 10^{-27}\text{kg}$, $M_{\text{Ca}}=40,1\text{ amu}$, $M_{\text{Cu}}=63,5\text{ amu}$, $M_{\text{O}}=16\text{ amu}$, $M_{\text{Sr}}=87,6\text{ amu}$, $M_{\text{Bi}}=209\text{amu}$)

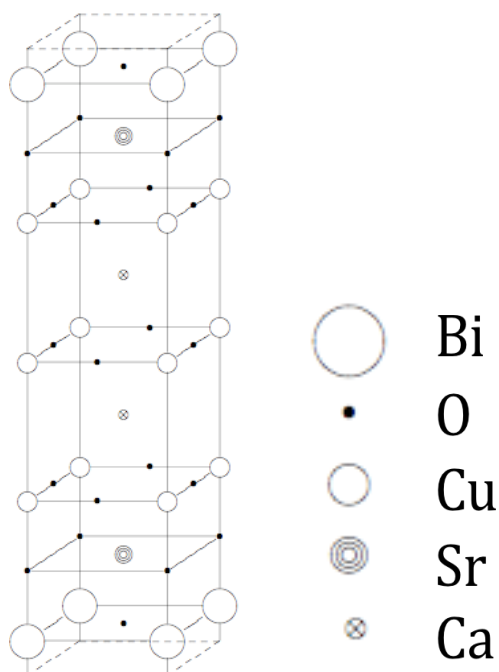


Fig. 1 Enhetscellen för högttemperatursupralederen $\text{Bi}_x\text{Sr}_y\text{Ca}_z\text{Cu}_w\text{O}_v$

2. I ett röntgendiffraktionsexperiment ($\lambda=0,154\text{nm}$), utfört på ett polykristallint material, fann man Bragg-reflektioner vid spridningsvinklar (θ) $19,0^\circ$; $22,5^\circ$;

33,3⁰; 39,0⁰; 41,5⁰; 49,5⁰; 56,5⁰; 59,0⁰; 69,5⁰ och 84,0⁰. Vilken kubisk struktur kristalliserar materialet i? (4p)

- 3) En kristall bestående av endimensionella atomkedjor (gitterparameter $a=2,7\text{\AA}$) med alternerande Pt och Cl joner visar ett bandgap på 9 THz mellan akustiska och optiska fonongrenar vid Brillouinzonkanten.

Beräkna:

a) elastisk konstant C mellan Pt och Cl atomer (i enheter eV/\AA^2) (2p).

b) ljudhastigheten för akustiska vågor (2p).

($M_{\text{Pt}}=195 \text{ amu}$, $M_{\text{Cl}}=35,5 \text{ amu}$, $1\text{amu}=1,6710^{-27}\text{kg}$, $1\text{eV}=1,610^{-19}\text{J}$).

- 4) Högtemperatursupraleedarna (se uppgift 1) utmärks av ovanlig elektrondynamik där elektronerna bara rör sig inom tvådimensionella plan som innehåller Cu och O atomer (CuO_2 -se Fig.1). Elektronernas bandstruktur i ledningsbandet för dessa kristaller ($E(\vec{k})$) kan beskrivas med dispersionsrelationen

$$E(\vec{k}) = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a)$$

där $\mathbf{k}=(k_x, k_y, k_z)$ är elektronens vågvektor, E elektronenergi, $|k_x|, |k_y| \leq \frac{\pi}{a}$

och t =konstant (Obs: elektronernas energi beror bara på k_x och k_y).

Beräkna:

a) Energin vid botten samt toppen på ledningsbandet i dessa kristaller (1p).

b) Fermienergin om ledningsbandet är halvfyllt (1, 5 p).

c) Formen av Fermiytan i dessa kristaller i det tvådimensionella k_x, k_y -planet då ledningsbandet är halvfyllt (1,5p).

5. Elektrontätheten i en metall, som kan väl beskrivas med fria elektronmodellen, är $N=5 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$. Metallen placeras i ett pålagt yttre magnetfält $B=10\text{T}$. Beräkna elektrontätheten för elektroner vars spinn är riktade med och mot det yttre magnetfältet. (4p)

Lycka till
Igor och Jari

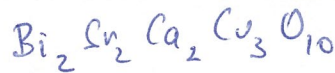
Lösningar till tentamen 2010 01 14

1)

a)

- i) 8 st Bi³⁺ joner $\times \frac{1}{4}$ Bi joner per cell = 2 Bi³⁺ joner
- ii) 12 st Cu joner $\times \frac{1}{4}$ Cu = 3 Cu²⁺
- iii) 2 st Ca + 2 st Sr per enhetscell
- iv) 10 st O joner per enhetscell

b) kemisk formel



c) jonnänsa per enhetscell

$$M = 2M_{\text{Bi}} + 3M_{\text{Cu}} + 2M_{\text{Ca}} + 2M_{\text{Sr}} + 10M_{\text{O}}$$

$$M = 1.66 \cdot 10^{-27} (2 \cdot 209 + 3 \cdot 63,5 + 2 \cdot 40,1 + 2 \cdot 87,6 + 10 \cdot 16) = 1.74 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

$$\text{tätheten } \rho = \frac{1.7 \cdot 10^{-24} \text{ kg}}{5,4 \cdot 5,4 \cdot 3,7 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3} = \underline{\underline{1.58 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}}$$

2)

Gör följande tabell:

θ	$\sin^2 \theta$	$h^2 + k^2 + l^2$	(färdig för yttre beredning)	$\frac{\sin^2 \theta}{h^2 + k^2 + l^2}$
19	0.105995	3	motströkar (h,k,l) = (1,1,1)	0.0353315
22.5	0.146447	4	struktur = (2,0,0)	0.036617
33	0.296632	8		0.037074
39	0.396044	11		0.036588
41.5	0.439065	12		
49.5	0.578217	16		
56.5	0.655566	19		
59.0	0.734736	20		
69.5	0.877355	24		
84.0	0.989074	27	(motströkar (h,k,l) = (4,0,0))	

\Rightarrow yttre beredning struktur

3) Bandsegit vid BZ kanten är:

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2C}{M_{Cl}}} - \sqrt{\frac{2C}{M_{Pt}}} \Rightarrow$$

$$C = 0.5 \cdot \frac{(\Delta\omega)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{M_{Cl}}} - \frac{1}{\sqrt{M_{Pt}}}\right)^2}$$

$$C = 0.5 \cdot \frac{81 \cdot 10^{24} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}{\left(\frac{1}{\sqrt{35.5}} - \frac{1}{\sqrt{195}}\right)^2} = 7.26 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$C = 7.26 \cdot 10^{-20} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = 7.26 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{1.6} \cdot 10^{19} \frac{\text{eV}}{\text{J}} \cdot 10^{-20} \frac{\text{m}^2}{\text{Å}^2}$$

$$\underline{C = 0.453 \frac{\text{eV}}{\text{Å}^2}}$$

b)
$$v_0 = a \sqrt{\frac{C}{2(M_{Pt} + M_{Cl})}}$$

$$v_0 = 2.7 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{7.26 \text{ kg/s}^2}{2(195 + 35.5) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}} = \underline{\underline{832 \text{ m/s}}}$$

4)

a) energi vid bandbotten:

$$\text{då är } \vec{k} = 0 \Rightarrow E(0,0,0) = -4t$$

energi vid bandtoppen

$$\text{då är } \vec{k} = \left(\pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{\pi}{a}, k_z \right) \Rightarrow E\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, k_z\right) = +4t$$

b) bandet är halvfyllt $\Rightarrow E_F$ ligger precis i mitten mellan bandbotten och bandtoppen dvs

$$E_F = 0$$

(obs: bandet är symmetriskt)

c) Fermiytan:

$$E(\vec{k}) = -2t [\cos k_x a + \cos k_y a] = E_F = 0$$

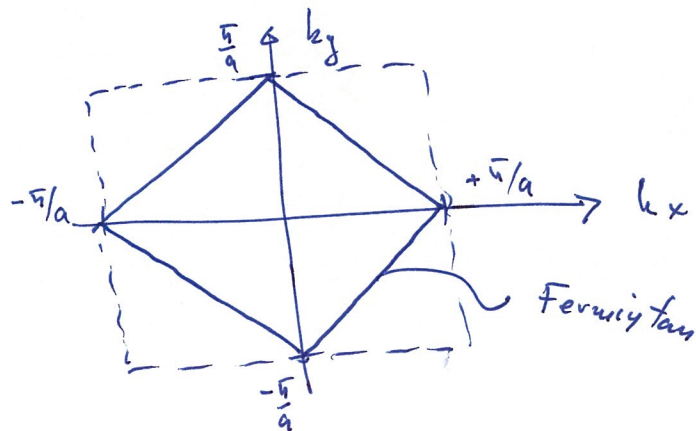
$$\Rightarrow k_y = \pm \left(\frac{\pi}{a} \pm k_x \right)$$

\Rightarrow Fermiytan är en ~~kvadrat~~ kvadrat med sidorna $\frac{\pi}{a}$

med:

$$k_y = \frac{\pi}{a} - k_x, \quad k_y = \frac{\pi}{a} + k_x \quad \text{för } 0 \leq k_x \leq \frac{\pi}{a}$$

$$\text{och } k_y = \frac{\pi}{a} + k_x, \quad k_y = \frac{\pi}{a} - k_x \quad \text{för } -\frac{\pi}{a} \leq k_x \leq 0$$

Fermiytan visas på figuren: ~~☞~~

5

$$N = \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2}$$

Om $B \neq 0 \Rightarrow$

$$E_F(\uparrow) = E_F + \mu_B B$$

$$E_F(\downarrow) = E_F - \mu_B B$$

$$\Rightarrow N_{\uparrow} = \frac{(2m)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2}(\uparrow) = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{\mu_B B}{E_F}\right)^{3/2} \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{3\mu_B B}{E_F}\right)$$

$$N_{\downarrow} = \frac{(2m)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2}(\downarrow) = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{\mu_B B}{E_F}\right)^{3/2} \approx \frac{N}{2} \left(1 - \frac{3\mu_B B}{E_F}\right)$$

vidare har vi: $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N)^{2/3} = 7.9 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$$\frac{\mu_B B}{E_F} = \frac{9.27 \cdot 10^{-24} \cdot 10}{7.9 \cdot 10^{-19}} = 1.7 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{N_{\uparrow}}{N} = 0.5 \cdot (1 + 1.76 \cdot 10^{-4}) = 0.500088$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{\uparrow} = 2.50044 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \\ N_{\downarrow} = 2.49956 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \end{cases}$$

Obs: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $\mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$