

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

Tentamen

Fredag 13/1, 2006. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

Återlämning sker från den 27/1 i mitt rum (L3063) i det nya MV huset.

- Om de stokastiska variablerna ξ och η har kovarians 0, är de då oberoende? Visa med exempel, eller i alla fall ge en övertygande förklaring.
 - Om en stokastisk variabel ξ har kovarians 0 med sig själv (dvs $\mathbf{Var}(\xi) = 0$), är den då oberoende av sig själv? (*Ledning:* Använd definitionerna).
- Ge ett exempel på en stokastisk process med $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ med väntevärdesfunktion $m_X(t) = 0$ och kovariansfunktion $r_X(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$ som inte är Wienerprocessen.
 - Ge ett exempel på en stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ med kovariansfunktion $r_x(\tau) = \frac{1}{2}$.
- En damm innehåller från början X_0 kubikmeter vatten. Varje dag rinner 10% av vattnet bort, och en mängd likformigt mellan 0 och 1 kubikmeter tillkommer. Mängden som tillkommer varje dag är oberoende av tidigare dagars tillrinning och vattenmängd.
 - Beskriv (rekursivt) en stokastisk process $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ som ger hur mycket vatten dammen innehåller vid slutet på varje dag.
 - Vilket väntevärde måste X_0 ha att $\mathbf{E}[X_n]$ ska vara konstant? Vilken varians måste X_0 ha för $\mathbf{Var}[X_n]$ ska vara konstant?
 - Om X_0 har detta väntevärde och denna varians, är processen då svagt stationär?
- Låt $W(t)$ vara en Wienerprocess. Konvergerar

$$\frac{W(t)}{\sqrt{t}}$$

mot något i kvadratisk medel då $t \rightarrow \infty$?

5. Ett systems utveckling ges av en tids-kontinuerlig Markov process $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ med följande generator matris:

$$G = \begin{bmatrix} ? & a & b \\ 0 & ? & c \\ ? & 0 & -(a+b) \end{bmatrix}$$

- (a) Fyll i de värden som ersats med frågetecken i uppgiften.
(b) Beräkna den stationära fördelningen.
6. Låt $Y(n)$ vara summan av n stycken oberoende kast med en rättvis tärning. För stora värden på n , ge det (ungefärliga) värdet på:

$$\mathbf{P}(Y(n) \text{ är delbar med } 7).$$

(*Ledning:* Hitta en finit Markov kedja som beskriver detta.)

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

Tenta FACIT

1. (a) Nej. Exempel: Låt ξ vara likformigt fördelad på $\{-1, 0, 1\}$. Låt $\eta = \xi^2$.
(b) Ja. Om ξ har varians noll antar den ett värde x med sannolikhet 1. Så $\mathbf{P}(\xi \in A) = 0$ eller 1 beroende på om $x \in A$. Det följer att

$$\mathbf{P}(\xi \in A, \xi \in B) = 1 = \mathbf{P}(\xi \in A)\mathbf{P}(\xi \in B)$$

om både A och B innehåller x, och

$$\mathbf{P}(\xi \in A, \xi \in B) = 0 = \mathbf{P}(\xi \in A)\mathbf{P}(\xi \in B)$$

annars. Alltså är ξ oberoende av sig självt.

2. (a) Låt $Y(t)$ vara en Poisson process med intensitet σ^2 . Låt

$$X(t) = Y(t) - \sigma^2 t$$

- (b) Låt ξ vara $N(0, \frac{1}{2})$ fördelad, och låt $X(t) = \xi$ för alla t . $\mathbf{Cov}(X(t), X(t + \tau)) = \mathbf{Cov}(\xi, \xi) = 1/2$.

3. (a) Låt ξ_n vara likformigt fördelad på $[0, 1]$ oberoende av allting annat. $X_{n+1} = 0.9X_n + \xi_n$.

- (b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_{n+1}] &= 0.9\mathbf{E}[X_n] + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] \\ &= 0.9\mathbf{E}[X_n] + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

För att $\mathbf{E}[X_n]$ ska vara konstant måste $\mathbf{E}[X_0]$ alltså lösa ekvationen: $x = 0.9x + 1/2$, vilket ger $\mathbf{E}[X_0] = 5$ kubikmeter.

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[X_{n+1}] &= 0.9^2\mathbf{Var}[X_n] + \mathbf{Var}[\xi_{n+1}] \\ &= 0.9^2\mathbf{Var}[X_n] + \frac{1}{12}\end{aligned}$$

På samma sätt får vi att $\mathbf{Var}[X_0] = 0.44$.

- (c) Ja.

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau}) &= 0.9\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau-1}) + \mathbf{Cov}(X_n, \xi_{n+\tau-1}) \\ &= 0.9\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau-1}) = \dots = .9^\tau\mathbf{Var}[X_n]\end{aligned}$$

vilket inte beror på n om Variansen är konstant.

4. Nej. Använd Loeve eller Cauchy kriteriet:

$$\begin{aligned} \lim_{s,t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\frac{W(t)W(s)}{\sqrt{st}} \right] &= \frac{\sigma^2 \min(s, t)}{\sqrt{st}} \\ &= \frac{\sigma^2 \sqrt{s}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

konvergerar ej för alla $s, t \rightarrow \infty$.

5. (a)

$$G = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ 0 & -c & c \\ (a+b) & 0 & -(a+b) \end{bmatrix}$$

(b) Den stationära fördelning ges av $[\pi_0, \pi_1, \pi_2]G = 0$, vilket betyder att

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2] = \frac{1}{2c+a} [c, a, c]$$

6. Låt $X_n = Y(n) \pmod{7}$, dvs med hur mycket $Y(n)$ skiljer sig från det senaste talet som är delbart med 7. Detta är en Markov kedja, med övergångsmatrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan lätt se att $\bar{\pi} = [1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7]$ är en stationär fördelning för en irreducibel och aperiodisk Markov kedja. Sannolikheten att $X_n = 0$, dvs att $Y(n)$ är delbar med 7, är alltså ungefär $1/7$ i längden.