TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
Tentamen

Onsdag 17/8, 2005. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg 031-7725366 (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var nogranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara stokastiska variabler. Låt sedan, för $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

vara en linjärkombination. Beräkna $\mathbf{E}\{\eta\}$ och $\mathbf{Var}\{\eta\}$. (Tänk på vad jag *inte* sagt om variablerna.)

2. (a) Om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende Levy processer, är då deras summa:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

en Levy process?

(b) Om $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende självsimilära processer med index $\kappa = 1$ är då deras summa:

$$W(t) = U(t) + V(t)$$

en självsimilär process?

3. Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wienerprocess ($\sigma^2 = 1$). Låt sedan

$$Y(t) = \frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}$$

(a) Vad har $Y(t)$ för fördelning?

(b) Är Y en stationär process? Svagt stationär?

4. Låt $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en Markovkedja på tillståndsrummet S, med övergångsmatris P och startfördelning $\mu^{(0)}$. Skriv $\mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i)$ i termer av P och $\mu^{(0)}$.

5. Knut och Alice spelar ett spel om fyra kronor. I varje omgång så vinner Knut en krona från Alice med sannolikhet p, annars så vinner Alice en från Knut. De börjar med två kronor var, och varje omgång är oberoende av tidigare omgångar. Om någon av dem få alla fyra kronorna, så börjar de igen nästa omgång med två kronor var.

   Här är tentan oklart skriven. Om en av spelarna får slut på pengar, så räknas det som en omgång där den ena har 0 kronor, och den andra 4. Sedan börjar en till omgång där båda har två igen. Kedjan har alltså fem tillstånd.

   (a) Skriv ner spelets övergångsmatris, och beräkna dess stationära fördelning π.

   (b) Knut och Alice har hållit på och spelat mycket länge. Ger π sannolikheterna att de befinner sig i de olika tillstånden vid en given tid?

6. För varje $\lambda \geq 0$ är $\{X_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ Poissonproces med intensitet λ. Låt

$$Y_\lambda(t) = \frac{X_\lambda(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda}}.$$

   När $\lambda \to \infty$ så konvergerar Y_λ (i någon mening) mot en Gaussisk process $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$. Detta innebär att för varje t så gäller:

$$Y_\lambda(t) \xrightarrow{L^2} Z(t) \text{ då } \lambda \to \infty.$$

   Allting ovan får ni antaga. Frågan är denna: vilken sorts Gaussisk process måste Z vara?

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

KURSUTVÄRDERING PÅ KURSHEMSIDAN!

http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMS125/

TENTA FACIT

---

1. $\mathbf{E}[\eta] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{E}[\xi_i]$. $\mathbf{Var}[\eta] = \mathbf{Cov}[\eta, \eta] = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \mathbf{Cov}[\xi_i, \xi_j]$.

2. (a) En Levy process har oberoende och och stationära ökningar. Oberoende ökningar: För alla $n \geq 1$ och $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gäller att:

$$\begin{aligned}&[Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \ldots, Z(t_n) - Z(t_{n-1})] = \\ &[X(t_0) + Y(t_0), X(t_1) - X(t_0) + Y(t_1) - Y(t_0), \ldots, \\ &X(t_n) - X(t_{n-1}) + Y(t_n) - Y(t_{n-1}))] .\end{aligned}$$

Vänsterledet är en vector av oberoende element, eftersom högerledet är det. Stationära ökningar kan visas på liknande sätt.

(b) För alla $n \geq 1$ och $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gäller att:

$$\begin{aligned}[W(\lambda t_0), W(\lambda t_1), \ldots, W(\lambda t_n)] &= [U(\lambda t_0) + V(\lambda t_0), U(\lambda t_1) + V(\lambda t_1), \ldots, \\ &\qquad U(\lambda t_n) + V(\lambda t_n)] \\ &\stackrel{D}{=} [\lambda U(t_0) + \lambda V(t_0), \lambda U(t_1) + \lambda V(t_1), \ldots, \\ &\qquad \lambda U(t_n) + \lambda V(t_n)] \\ &= [\lambda W(t_0), \lambda W(t_1), \ldots, \lambda W(t_n)]\end{aligned}$$

3. (a) En linjärkombination av två normalfördelade variabler är igen normalfördelad. Dessutom:

$$E[\frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}] = 0.$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[\frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}] &= V_X(t) - V_x(t/2) - 2r_X(t, t/2) \\ &= \frac{t + t/2 - 2\min(t, t/2)}{t} \\ &= 1/2.\end{aligned}$$

Det följer att $Y(t)$ är $N(0, 1/2)$ fördelad för alla t.

(b) Vi beräknar kovariansfunktionen. Låt $0 \leq s < t$.

$$\begin{aligned}
r_Y(s,t) &= \mathbf{Cov}[Y(s), Y(t)] \\
&= \frac{1}{t}\mathbf{Cov}[X(s) - X(s/2), X(t) - X(t/2)] \\
&= \frac{1}{t}\left(\mathbf{Cov}[X(s), X(t)] + \mathbf{Cov}[X(s/2), X(t/2)]\right. \\
&\quad \left. -\mathbf{Cov}[X(s/2), X(t)] - \mathbf{Cov}[X(s), X(t/2)]\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(s + s/2 - s/2 - \min(s, t/2)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{om } s < t/2 \\ \frac{s-t/2}{t} & \text{annars} \end{cases}
\end{aligned}$$

Då detta inte är en funktion av $t - s$ är inte processen svagt stationär, och därför ej heller stationär.

4. Man kan beräkna:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P(X_3 = \ell, X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P(X_3 = \ell | X_2 = k) P(X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P_{k\ell} P_{jk} P_{ij} \mu^{(0)}(i) \\
= & P_{ij}\mu^{(0)}(i) \sum_{k \in S} P_{k\ell} P_{jk}.
\end{aligned}$$

Eller så kan den som minns teorin helt enkelt skriva:

$$\mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i) = (P^2)_{j\ell} P_{ij} \mu^{(0)}(i)$$

5. (a) Låt X_i vara antal kronor som Knut har. Då blir X_i en Markov kedja med övergångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \\ 0 & 1-p & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Vi vet att en fördelning π är stationär om $\pi P = \pi$. Detta innebär att $\pi_1 = (1-p)\pi_2$, $\pi_0 = (1-p)\pi_1 = (1-p)^2\pi_2$, $\pi_3 = p\pi_2$ och $\pi_4 = p\pi_3 = p^2\pi_2$. Vi vet även att:

$$\begin{aligned}
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \\
&= (1-p)^2\pi_2 + (1-p)\pi_2 + \pi_2 + p\pi_2 + p^2\pi_2 \\
&= \pi_2(2p^2 - 2p + 3)
\end{aligned}$$

Det följer att:

$$\pi = \frac{1}{2p^2 - 2p + 3}[(1-p)^2, 1-p, 1, p, p^2]$$

(b) Om man börjar i tillstånd två, och Alice vinner en gång, varefter Knut vinner, så är vi tillbaks i tillstånd två efter två steg. Men om Alice vinner två gånger, är vi tillbaks i tillstånd två först efter tre steg. Om $0 < p < 1$ så kan både dessa saker inträffa med positiva sannolikhet. Eftersom två och tre är relativt prima, så är kedjan då aperiodisk. Fördelningen för aperiodiska, irreducibla Markov kedjor konvergerar med tiden mot sin stationära fördelning. Alltså ger π (ungefär) sannolikheterna att de befinner sig i tillstånden vid en given tid.

Om p i stället är lika med 0 eller 1, så blir kedjan periodisk, med period 3. Den stationära fördelningen beskriver då inte sannolikheten att spelet befinner sig i vissa tillstånd efter att Knut och Alice spelat länge.

6. Det viktiga här är att minnas att om en sekvens stokastiska variabler konvergerar i L^2 mot någon variabel, så konvergerar dess väntevärde mot gränsvärdets, och om två sekvenser konvergerar så konvergerar kovariansen mot gränsvärdenas kovarians. Alltså gäller att:

$$\begin{aligned} m_W(t) = \mathbf{E}[W(t)] &= \mathbf{E}[\underset{\lambda\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, Y_\lambda(t)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{E}[Y_\lambda(t)] = 0 \end{aligned}$$

och:

$$\begin{aligned} r_W(s,t) = \mathbf{Cov}(W(s), W(t)) &= \mathbf{Cov}[\underset{\lambda\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, Y_\lambda(t), \underset{\lambda\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, Y_\lambda(s)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{Cov}[Y_\lambda(t), Y_\lambda(s)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbf{Cov}[X_\lambda(t), X_\lambda(s)}{\lambda}] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda \min(t,s)}{\lambda} \\ &= \min(t,s) \end{aligned}$$

Eftersom W är en Gaussisk process, så defenieras den unikt av sina väntevärdes och kovariansenfunktioner. W är alltså standard Wienerprocessen.