TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
Tentamen

Måndag 23/5, 2005. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg 031-7725366 (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. (a) Varför suger kovariansen? (Det vill säga, vad har kovariansen för begränsningar vad gäller att beskriva sambanded mellan två stokastiska variabler?)

   (b) För vilken klass av fördelningar är kovariansen mest användbar? För vilken typ av stokastiska processer är således väntevärdes- och kovariansfunktionerna mest användbara?

2. En Lévyprocess är en stokastisk process med oberoende och stationära ökningar. Om en process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess, är då alltid $Y(t) = (X(t))^2$ också en Lévyprocess? (Börja gärna med att prova om det håller för någon av våra vanligaste Lévyprocesser!)

3. (a) Ge ett exempel på en Gaussisk process som varken är en Wienerprocess, eller Ornstein-Uhlenbeck processen (eller en skalning eller kombination därav).

   (b) $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Wienerprocess. Visa att processen $Y(t) = W(t+T) - W(t)$ är stationär. (Ledning: Är den svagt stationär?)

4. Visa att om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är Poissonprocess så gäller det att

$$\frac{X(t)}{t} \xrightarrow{L^2} \lambda.$$

   Det vill säga, vänsterledet konvergerar i kvadratisk medel mot λ.

5. En Markovkedja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ på tillståndsrummet $S = \{0, 1, 2\}$ har följande övergångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} c & 2a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & 2a & c \end{bmatrix}$$

   (a) Vilka värden kan konstanterna a, b, och c anta om P ska vara en väldefenierad övergångsmatris?

   (b) Vilka värden kan konstanterna a, b, och c anta för att X_n ska ha en unik stationär fördelning?

   (c) Beräkna den stationära fördelningen för något av de fallen då den existerar unikt. Är den stationära fördelningen den samma för alla tillåtna värden av a, b, och c?

6. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en Markovkedja på ett tillståndsrum S. Vilken egenskap måste $g : S \to V$ (en funktion från S på en annan mångd V) ha för att $Y_n = g(X_n)$ ska vara en Markovkejda med tillståndsrum V.

   Visa både att egenskapen är tillräcklig, och ge ett exempel på en funktion som inte har egenskapen, för vilken Y_n inte är en Markovkedja.

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

KURSUTVÄRDERING PÅ KURSHEMSIDAN!

http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMS125/

TENTA FACIT

---

1. (a) Kovariansen kan endast beskriva linjärt beroende mellan stokastiska variabler. Därför betyder inte that kovariansen är 0 att variabler är oberoende.

   (b) För normalfördelade (Gaussiska) stokastiska variabler mäter kovariansen all möjlig beroende. Således är väntesvärdes och kovariansfunktionen mest användbara för Gaussiska processer.

2. Det finns många sätt att visa att det inte håller. Låt t. ex. $X(t)$ vara en Poissonprocess. Då gäller:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y(t+\tau) - Y(t)] &= \mathbf{E}[X(t+\tau)^2] - \mathbf{E}[X(t)^2] \\
&= V_X(t+\tau) + m_X(t+\tau)^2 - V_X(t) - m_X(t)^2 \\
&= \lambda(t+\tau) + \lambda^2(t+\tau)^2 - \lambda t - \lambda^2 t^2 \\
&= \lambda\tau + \lambda\tau^2 + 2\lambda t\tau
\end{aligned}$$

   Altså beror väntevärdet av $Y(t)$s ökningar på t, vilket motsäger att den har stationära ökningnar.

3. (a) Det enklast exemplet är att ta $X(t) = \xi$ för alla $t \geq 0$, och låta ξ vara en normalfördelad stokastisk variabel. Den processen antar ett konstant normalfördelat värde.

   (b) $m_Y(t) = m_W(t+T) - m_W(t) = 0$ beror inte på t.

$$\begin{aligned}
r_Y(t+\tau) &= \mathbf{Cov}[Y(t), Y(t+\tau)] \\
&= \mathbf{Cov}[W(t+T) - w(t), W(t+\tau+T) - w(t+\tau)] \\
&= \mathbf{Cov}[W(t+T), W(t+\tau+T)] - \mathbf{Cov}[W(t), W(t+\tau+T)] \\
&\quad - \mathbf{Cov}[W(t+T), W(t+\tau)] + \mathbf{Cov}[W(t), W(t+\tau)] \\
&= \sigma^2(t+T-t-\min(t+T, t+\tau)+t) \\
&= \sigma^2(T - \min(T,\tau)) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{om } \tau \geq T \\ \sigma^2(T-\tau) & \text{annars.} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Eftersom varken $m_Y(t)$ eller $r_Y(t, t+\tau)$ beror på t är $Y(t)$ svagt stationär. Eftersom skillnaden mellan två Gaussiska processer är en Gaussisk process, så är den även det. En svagt stationär Gaussisk process är stationär.

4. Det följer från direkt beräkning:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(X(t)/t-\lambda)^2] &= t^{-2}\mathbf{E}[(X(t)-\lambda t)^2] \\
&= t^{-2}\mathbf{E}[(X(t)-\mathbf{E}[X])^2] \\
&= t^{-2}\mathbf{Var}[X(t)] \\
&= \lambda/t \to 0 \text{ då } t\to\infty
\end{aligned}$$

5. (a) För att det ska vara en stokastisk matris måste alla element ligga i $[0,1]$ och radsummorna vara 1. Det följer att $a\in[0,0.5]$ och att $c=b=1-2a$.

   (b) För att det ska finnas en unik stationär process måste kedjan vara irreducibel. Det är den endast om $a>0$.

   (c) Den stationära fördelningen ges av $\pi=[\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}]$. Det gäller för att alla godtagbara värden av a, b, och c.

6. Egenskapen är att g måste ha vara en *injektiv* funktion. Det betyder att $g(x)=g(y)$ omm $x=y$. För en injektiv funktion har en invers defenierad på gs bildmängd. Det följer att:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i,Y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,Y_0=i_0) \\
=\;&\mathbf{P}(X_{n+1}=g^{-1}(j)|X_n=g^{-1}(j_n),X_{n-1}=g^{-1}(j_{n-1}),\ldots,X_0=g^{-1}(j_0)) \\
=\;&\mathbf{P}(X_{n+1}=g^{-1}(j)|X_n=g^{-1}(j_n)) \\
=\;&\mathbf{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i).
\end{aligned}$$

Alltså uppfyller Y_n Markovegenskapen och är således en Markovkedja när g är injektiv.

För ett motexempel när g inte är injektiv, ta $S=\{1,2,3\}$ och låt X_n ha följande överångsmatris:

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

och låt $g(1)=1$, $g(2)=2$, och $g(3)=2$. Det är inte möjligt för X_n att återvända till tillstånd 1 om den var där för en tur sedan, alltså gäller $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1|Y_n=2,Y_{n-1}=1)=0$. Men å andra sidan gäller $\mathbf{P}(Y_{n+1}=1|Y_n=2,Y_{n-1}=2)=1$. Detta motsäger Markovegenskapen.