Exempel 1

Antag ett $Po(\lambda)$ fördelat antal lotter. Varje lott vinner med sannolikheten p. Hur många ober. vinstlotter har vi?

ξ - antalet lotter

η - antalet vinstlotter.

$\therefore \quad \xi \sim Po(\lambda)$

frekvensfunktionen för ξ blir då

$$P(\xi = x) = f_\xi(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Givet ett utfall $x = n$ har vi n lotter.

$\eta \sim Bin(n, p)$

Viktigt!

$$P(\eta = k / \xi = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E[\eta / \xi = n] = np$$

Detta ger

$$E[\eta] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\eta / \xi = n] f_\xi(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} np f_\xi(n) = p \sum_{n=0}^{\infty} n f_\xi(n) = p E[\xi]$$

$$= \{\text{Poisson}\} = p\lambda$$

$\therefore$ Antalet vinstlotter är $p\lambda$

Övning 1.5

Beräkna karakteristiska ekvationen för en $Po(\lambda)$-förd. stokastisk variabel ξ.

Lsg:

$$f_\xi(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ x \geq \mathbb{Z} \end{matrix}$$

karakteristiska ekv. ges av.

$$\phi_\xi(t) = E\left[e^{i2\pi t\xi}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{i2\pi t x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i2\pi t})^x}{x!}$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \right\}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i2\pi t}} = e^{\lambda(e^{i2\pi t}-1)}$$

$$= \exp\left(\lambda(e^{i2\pi t}-1)\right)$$

Övning 2.17

Chebyshev olikheten

$$P(|\xi| > \varepsilon) \leq \frac{E[\xi^2]}{\varepsilon^2} \quad ; \quad \varepsilon > 0$$

Bevis

Händelse A

$\Rightarrow$ $A \subseteq \Omega$

indikator variabel.

så finns det en s.v I_A givet av

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } \omega \in A \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$E[I_A] = \sum_x x P(I_A = x)$$
$$= 0 \cdot P(I_A = 0) + 1\, P(I_A = 1)$$
$$= P(I_A = 1) = P(A)$$

$$P(|\xi| > \varepsilon) = P(\xi^2 > \varepsilon^2) = E[I_{\{\xi^2 > \varepsilon^2\}}]$$

$$\left\{ I_{\{\xi^2 > \varepsilon^2\}} \leq \frac{\xi^2}{\varepsilon^2} I_{\{\xi^2 > \varepsilon^2\}} \right\}$$

$$\leq E\left[\frac{\xi^2}{\varepsilon^2} I_{\{\xi^2 > \varepsilon^2\}}\right] + E\left[\frac{\xi^2}{\varepsilon^2} I_{\{\xi^2 \leq \varepsilon^2\}}\right]$$

$$= E\left[\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\left(I_{\{\xi^2 > \varepsilon^2\}} + I_{\{\xi^2 \leq \varepsilon^2\}}\right)\right]$$

$$= E\left[\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} E[\xi^2]$$

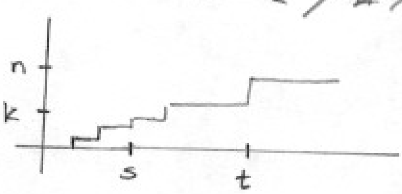
Övning 1.4

$\{X(s)\}_{s\geq 0}$ är en Poissonprocess

givet att $0 < s < t$
$0 \leq k \leq n$

Beräkna

$P(X(s)=k \mid X(t)=n) = *$



Lsg:

$$* = \frac{P(X(s)=k, X(t)=n)}{P(X(t)=n)} = \frac{P(X(s)=k, X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$= \{$ober. ökn.$\}$

$$= \frac{P(X(s)=k)\, P(X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!} \; \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{(\lambda s)^k (\lambda(t-s))^{n-k}}{(\lambda t)^n}$$ ~ dela upp i k och n-k

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} = P(\xi = k)$$

där $\xi \sim Bin(n, \frac{s}{t})$

Övning 3.9

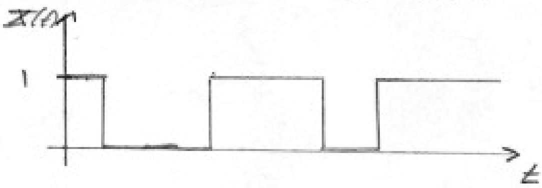
Stationära telegrafsignaler.

$$X(t) = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{\xi+Y(t)}\right)$$

där $Y(t)$ är en Poissonprocess och ξ är en ober. s.v.

$$P(\xi=0) = P(\xi=1) = \frac{1}{2}$$

Realisering av $X(t)$



Bestäm

$m_X(t)$ och $r_X(t, t+\tau)$

Lsg:

$$m_X(t) = E[X(t)] = E\left[\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi+Y(t)})\right]$$

$$= \frac{1}{2}E[1] - \frac{1}{2}E\left[(-1)^{\xi+Y(t)}\right]$$

$$\overset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E\left[(-1)^{\xi}\right]E\left[(-1)^{Y(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E\left[(-1)^{Y(t)}\right]\underbrace{\left(\frac{(-1)^0}{2}+\frac{(-1)^1}{2}\right)}_{=0} = \frac{1}{2}$$

$$r_X(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - \frac{1}{4}$$

men

$$E[X(t)X(t+\tau)] = P(X(t)=1, X(t+\tau)=1)$$

$$= P\Big(\frac{1}{2}(1-(-1)^{\xi+Y(t)})=1,$$

$$Y(t+\tau)-Y(t) \text{ jämn}\Big)$$

$$= \{\text{ober. ökn}\}$$

Fort. övning 3.9

$$P\left(\tfrac{1}{2}\left(1-(-1)^{\xi+X(t)}\right)=1\right) P\left(X(t+\tau)-X(t) \text{ jämn}\right)$$

$$=\frac{1}{2} P\left(X(t+\tau)-X(t) \text{ jämn}\right) = \left\{ \begin{matrix} \text{Levy} \\ \Rightarrow \text{st. ökn.} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} P\left(X(\tau) \text{ jämn}\right)$$

$$X(\tau) \sim Po(\lambda\tau)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau\lambda)^{2k} e^{-\tau\lambda}}{(2k)!}$$

$$= \frac{e^{-\tau\lambda}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau\lambda)^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\tau\lambda}}{2} \cosh(\lambda\tau)$$

Exempel 2

Låt $\{X(t)\}_{t\in T}$ vara en Poissonprocess och $t_0 \in T$ godtyckligt.

Är då $X(t)$ kont. i kvadratisk mening?

Lsg:

$$E[(X(t) - X(t_0))^2]$$
$$= Var(X(t) - X(t_0)) + E[X(t) - X(t_0)]^2$$
$$= V_X(t) - V_X(t_0) + E[X(t) - X(t_0)]^2$$
$$= V_X(t) - V_X(t_0) - 2r_X(t, t_0) + (m_X(t) - m_X(t_0))^2$$
$$= \lambda(t + t_0 - 2\min(t, t_0)) + \lambda^2 (t - t_0)^2$$
$$= \lambda|t - t_0| + \lambda^2 (t - t_0)^2 \longrightarrow 0 \text{ då } t \to t_0$$

$\therefore$ En Poissonprocess är kont. i kvadratisk mening.

Övning 2.23

För vilka tal $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ konv.

$\sum \sigma_k e(k)$

då $\{e(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus.

Lsg.:

$e(t)$ okorrolerat $\Rightarrow cov(e(k), e(n)) = 0$

$$\begin{cases} E[e(t)] = 0 \\ Var(e(t)) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$cov\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \xi_k , \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \xi_l\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_k \sigma_l \, cov(\xi_k, \xi_l) = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \underbrace{Var(e(t))}^{=\sigma^2}$$

$\therefore$ konvergens då

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty.$$

Övning 3.18

Visa att en självsimilär process

$$\{X(t)\}_{t \geq 0}$$

med stationära ökningar är kont. omm $E[X(1)^2] < \infty$

Lsg:

Självsimilär:

$$(X(\lambda t_0), X(\lambda t_1), \dots, X(\lambda t_n)) \overset{D}{=} \lambda^k (X(t_0), \dots, X(t_n))$$

stationära ökningar:

$$X(t+\tau) - X(t) \overset{D}{=} X(\tau) - X(0)$$

En process är kont. om $\lim_{\varepsilon \to 0} X(t+\varepsilon) = X(t) \iff$

$$E[(X(t+\varepsilon) - X(t))^2] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\therefore\ E[(X(t+\varepsilon) - X(t))^2] = \left\{\begin{matrix}\text{stationära} \\ \text{ökn}\end{matrix}\right\}$$

$$= E[(X(\varepsilon) - X(0))^2] = \left\{\begin{matrix}\text{självsimilär} \\ X(0)=0\end{matrix}\right\}$$

$$= E[X(\varepsilon)^2] = E[(\varepsilon^k X(1))^2]$$

$$= \varepsilon^{2k} E[X(1)^2] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \quad \text{omm } E[X(1)^2] < \infty.$$

Exempel 3: Moving average filter.

$\{X(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ är en s.p. för något $q \in \mathbb{N}$

så finns impulssvar

$$h(x) = \begin{cases} 1/q & ; \ 0 \le x \le q-1 \\ 0 & ; \ \text{annars} \end{cases}$$

Definierar

$$Y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l) X(l)$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{l=k-q+1}^{k} X(l)$$

d.v.s genomsnittet av d q senaste värdena.

Om vi tar

$c_0, c_1, \ldots, c_{q-1} \in \mathbb{R}^+$

$\sum_{k=0}^{q-1} c_k = 1$

$$h(x) = \begin{cases} c_x & ; \ 0 \le x \le q-1 \\ 0 & ; \ \text{annars} \end{cases}$$

får vi

$$Y(k) = \sum_{l=0}^{q-1} c_l X(k-l)$$

kallas

Weighted moving average.

Övning 2.22 (Loéve kriteriet)

Visa att $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k$ existerar omm

$\lim_{k,l\to\infty} E[\xi_k \xi_l]$ existerar

Lsg:

Cauchy kriteriet.

$\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k$ existerar

omm

$$\lim_{k,l\to\infty} E[(\xi_k - \xi_l)^2] = 0$$

Antager att

$$\lim_{k,l\to\infty} E[\xi_k \xi_l] = x$$

$$\lim_{k,l\to\infty} E[(\xi_k - \xi_l)^2] = \lim_{k,l\to\infty} \left(E[\xi_k^2] - 2E[\xi_k \xi_l] + E[\xi_l^2]\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E[\xi_k^2] + \lim_{l\to\infty} E[\xi_l^2] - 2\lim_{k,l\to\infty} E[\xi_k \xi_l]$$

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} E[\underbrace{\xi_k^2}_{\xi_k \cdot \xi_k}] = x \right\}$$

$$\Rightarrow x + x - 2x = 0$$

$\therefore$ $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k$ existerar

$\Downarrow$

$\lim_{k,l\to\infty} \xi_k \xi_l$ existerar.

$\Downarrow$

$$\lim_{k,l\to\infty} E[\xi_k \xi_l] = E[\underset{k,l\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k \xi_l]$$

Övning 3.21

Är hagelbrus kont.?

När är hagelbrus deriverbart.

Lsg:

$\xi_1, \xi_2, \ldots$

$\eta_1, \eta_2, \ldots$

$Exp(\lambda)$ förd. ober. s.v.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$$

hagelbrus def. av

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\right) + \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t + \sum_{l=1}^{k} \eta_l\right)$$

Hagelbrus är svagt stationärt med

$$m_X = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

$$r_X(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g(x - \tau) dx$$

Om X är svagt stationär så är den kont.

$\Rightarrow$ Detta gäller om $g(x)$ kont.

X är deriverbar om r_X 2ggr deriverbar

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ 2ggr deriverbar.

Exempel 4: Spelarens fördärvelse

En person speler på ett kasino. Han börjar med i dollar. I varje omgång vinner han 1 \$ med sannolikheten p, och förlorar med sannolikheten $1-p=q$

Han avbryter då han är ruinerad eller har N \$.

Hans förmögenhet efter n omgånger är X_n. X_n är en tidshomogen Markov-kedja med $S=\{0,1,2,\dots,N\}$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0 och N är absorberende tillstånd
=> om vi träffer ett sådant tillstånd blir vi kvar i detta.

Låt w_i vara sannolikheten att vi någonsin når tillstånd N, om vi börjar i tillstånd i.

$$\therefore\ w_i = P(X_n \text{ når } N \mid X_0 = i)$$
$$= P(X_n \text{ når } N \mid X_0 = i, X_1 = i+1)\, P_{i,i+1}$$
$$+ P(X_n \text{ når } N \mid X_0 = i\ X_1 = i-1)\, P_{i,i-1}$$
$$= w_{i+1}\, p + w_{i-1}\, q$$

$$\therefore \begin{cases} w_i = w_{i+1}\, p + w_{i-1}\, q \\ w_0 = 0 \ ;\ w_N = 1 \end{cases}$$

Fort. exempel 4

om skrivnig ger.

$$w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}\left(w_i - w_{i-1}\right)$$

$\therefore$

$$w_2 - w_1 = \frac{q}{p} w_1$$

$$w_3 - w_2 = \frac{q}{p}(w_2 - w_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1$$

$$w_4 - w_3 = \frac{p}{q}(w_3 - w_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 w_1$$

$$\vdots$$

$$w_n - w_{n-1} = \frac{q}{p}\left(w_{n-1} - w_{n-2}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} w_1$$

$$w_i - w_1 = w_1\left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^3 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$W_i = w_1\left(\left(\frac{q}{p}\right)^0 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 + \frac{q}{p}} & ; \quad \text{om } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] w_1 \cdot i & ; \quad p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$w_N = 1$$

$$\begin{cases} w_i = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^n} & ; \quad p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] w_i = \dfrac{i}{N} & ; \quad p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Övning 7.1

Bestäm utsignalen från filtret med impulssvar $h(s) = \varphi(s)$ om insignalen är ett hagelbrus med $g(x) = \varphi(x)$.

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

d.v.s. tätheten för $N(0,1)$ fördelningen.

Lsg:

Hagelbrus:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\right) + \sum_{k=1}^{\infty} g\left(t + \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l\right)$$

där

$t \in \mathbb{R}$, $\xi_l, \eta_l \sim Exp(\lambda)$ ober.

Filter:

Ett filter med impulssvar $h(x)$ och insignal $X(t)$ ges av

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) X(t-z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(t - z - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(t - z + \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l\right)\right) dz$$

Ledning:

Om ξ, η ober. s.v. så gäller

$$f_{\xi+\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z) f_\eta(x-z)\, dz$$

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = k) P(\eta = n-k)$$

Använd detta med

$$x = \begin{cases} t - \sum \xi_k \\ t + \sum \eta_k \end{cases}$$

<u>fort. övning 7.1:</u>

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,\big(\varphi(t - z - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\big)\,dz$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,\varphi(t - z + \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l)\,dz$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{N(0,2)}\big(t - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\big)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} f_{N(0,2)}\big(t + \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l\big) = (*)$$

Eftersom summan av två ober. $N(0,1)$ ford. s.v är $N(0,2)$.

introducerar

$\zeta \sim N(0,1)$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,\zeta \sim N(0,2)$

$$\therefore \quad F_{\sqrt{2}\,\zeta} = P(\sqrt{2}\,\zeta \le t) = P(\zeta \le \tfrac{t}{\sqrt{2}})$$

$$= F_{\zeta}\big(\tfrac{t}{\sqrt{2}}\big)$$

$$\Rightarrow f_{N(0,2)}(t) = F'_{\sqrt{2}\,\zeta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} F'_{\zeta}\big(\tfrac{t}{\sqrt{2}}\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\big(\tfrac{t}{\sqrt{2}}\big)$$

$$\therefore (*) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\Big(\frac{t - \sum_{l=1}^{k} \xi_l}{\sqrt{2}}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\Big(\frac{t + \sum_{l=1}^{k} \eta_l}{\sqrt{2}}\Big)\Big)$$

Övning 5 Markovkedjor

Visa att om en Markovkedja har två stationära fördelningar π_1 och π_2, så har den oändligt många stationära fördelningar.

$$\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} P = \frac{\pi_1 P + \pi_2 P}{2} = \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$$

Detta ger

$$p\pi_1 + (1-p)\pi_2 \qquad p \in [0,1]$$

$$(p\pi_1 + (1-p)\pi_2)P = p\pi_2 + (1-p)\pi_2$$

$\Rightarrow$ Det $\exists$ en oändlig mängd stationära fördelningar

Övning 1 Markovkedjor:

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en s.p, med värdemängd $S = \{0, 1, 2\}$

Vi vet att

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{-1}, \ldots, X_0 = i_0)$$

$$= \begin{cases} P_{ij} & \text{; om } n \text{ jämn} \\ Q_{i,j} & \text{; om } n \text{ udda} \end{cases}$$

Processen är en Markovkedja. Men den är <u>inte</u> tidshomogen.
Skriv om kedjan med en utökad värdemängd så att denna blir tidshomogen.

<u>Lsg</u>:
Låter den nya värdemängden vara $V = S \times S$. D.v.s. alla element av typ (i,j) där $i,j \in S$

Definierar en ny tidsparameter m och

$$Y_m = (X_{2m}, X_{2m+1})$$

$$\therefore P(Y_{m+1} = (k,l) / Y_m = (i,j)) = Q_{j,k} P_{k,l}$$

(Observera att det står annorlunda i ledningen. Men det kan inte vara rätt om man definierar P och Q enl. ovan)

Radsumman $= 1 \Rightarrow$ Markovkedja.

$$\sum_{k,l \in S} P_{j,k} Q_{k,l} = \sum_{k \in S} P_{j,k} \sum_{l \in S} Q_{k,l}$$

$$= \sum_{k \in S} P_{j,k} = 1$$