Fluid Mekanik

TME055, 21 augusti, 2007

Typgodkänd miniräknare får användas

1 Flersvarsfrågor

(*3 poäng för rätt svar, -1 poäng för varje fel svar*)

1. $\omega = 0$ är likvärdig med

   a Rotationsfritt flöde.

   b Inkompressibelt flöde.

   c Isotermiskt flöde.

   d Tvådimensionellt flöde.

2. Vilken egenskap definierar en fysikalisk tensor?

   a Representationen av tensorn borde bero på vilken koordinataxel som väljs.

   b Tensorn måste vara av första ordningen.

   c Tensorn måste följa tensortransformationslagen när koordinatsystemet roteras.

   d Tensorn måste minst vara av tredje ordningen.

3. Det *Euleriska* betraktelsesättet, motsatt med det *Lagrangska* betraktelsesättet,

   a Rörelsen hos en partikel är medelvärderad över hela fluiddomänen, så att flödets storheter kan definieras.

   b Varje fluidpartikel i flödet definieras med hjälp av sin ursprungliga position.

   c Storheter så som densitet och hastighet är definierade som kontinuerliga funktioner av position och tid, oberoende av de underliggande fluidpartiklar.

   d Vi kan hanskas med ett oändligt antal fluidpartiklar.

4. I ett rotationsfritt flöde,

   a är cirkulationen > 0.

   b är cirkulationen < 0.

   c är flödet kompressibelt.

   d kan flödesfältet uttryckas i form av en potential.

5. Vilket av följnade på ståenden är *inte sant*:

   a Spänningstensorn beror på positionen av en punkt på en yta, men inte påytans orientering.

   b För en inkompressibel fluid, är det termodynaiska trycket lika med det mekaniska trycket.

   c Spänningstensorn är per definition anti-symmetrisk.

   d Cauchys rörelseekvation relaterar accelerationen till netto kraften vid en punkt och gäller för alla kontinuum.

6. I fluid dynamik beräkningar (Computational Fluid Dynamics),

   a Det initiala felet är viktigare än diskretiseringsfelet.

   b Endast finita differans diskretisering kan tillämpas.

   c Ekvationerna som beskriver flödet är lineariserade för att approximera flödets beteende.

   d Randvillkor är vanligtvis inte nödvändiga.

7. Vilket är det största problemet, när man försöker lösa turbulenta flöden *analytiskt*?

   a Dynamisk likformighetsskalning håller inte per definition.

   b Flödet är inte stationärt per definition.

   c Flödet kan inte vara irrationellt per definition.

   d Hastigheterna hos flödet är för höga för att lösa.

1. (*15 poäng*) Betrakta en bred inkompressibel vätskefilm med konstant tjocklek h som pga gravitationen flödar stationärt och fullt utvecklad längs med ett plan som lutar med vinkel θ, se figur 1. Atmosfären ger ett konstant tryck och försumbar skjuvspänning längs med den fria vätske ytan ($\frac{\partial u}{\partial y}|_{\text{ytan}} = 0$). Impulsekvationerna är

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

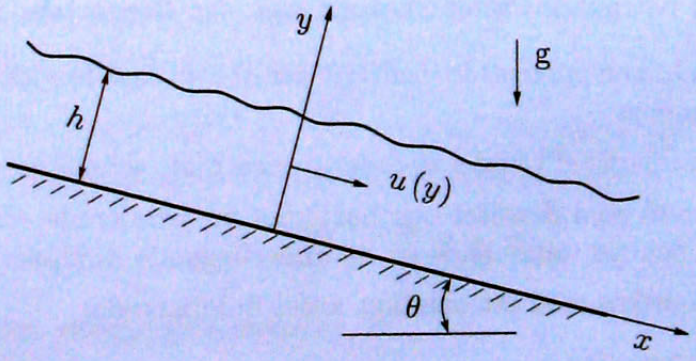

Figure 1: Problem 1.

   a Vad är konsekvensen av fullt utvecklad ströming för derivaterna i x riktingen? Vad följer för $\dfrac{\partial v}{\partial y}$? Varför?

   b Visa att tryckvariationen är hydrostatisk, genom att analysera v impulsekvationen.

   c Bestäm hastighetsfördelningen $u(y)$

   d Bestäm volymflödet per breddenhet, Q.

2. (*10 pts*) En tornado kan simuleras som ett två-delat cirkulerande flöde i cylindriska koordinater:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = \begin{cases} \Omega r & \text{if } r \leq R \\ \frac{\Omega R^2}{r} & \text{if } r > R \end{cases}$$

$$u_z = 0$$

där Ω är styrkan hos vinden (konstant).

a Skriv ut skjuvspänningstensorn i cylindriska koordinater.

b Bestäm vorticitetsvektorn i cylindriska koordinater.

c Beräkna cirkulationen Γ runt en cirkel med radien $r = 2R$ vars centrum är placerat i origo i r-θ planet.

3. (*19 pts*) Betrakta följande hastighetsfält:

$$u(x, y) = K\left(x^2 - y^2\right)$$
$$v(x, y) = -2Kxy$$
$$w(x, y) = 0$$

där K ä en konstant.

a Visa att hastighetsfältet är rotationsfritt.

b Verifiera att detta flöde är inkompressiblet.

c Bestäm fluidpartikelns acceleration $\frac{D\vec{u}}{Dt}$. *Ledtråd:* Den materiella derivatan, dvs derivatan som följer partikel, ä definierad i Euleriska koordinater som

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi$$

d Bestäm Laplacen av hastighetsvektorn,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

e Använd Bernoullis ekvation för att bestämma tryckfördelningen $p(x, y, z)$. *Ledtråd:* Låt $p = p_0$ vid origo ($x = y = z = 0$) för att bestämma högerledet i Bernoullis ekvation:

$$\frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{konstant}$$

Antag ρ är konstant.

4. (*20 poäng*) Börja från den inkompressibla Navier-Stokes ekvationer i x-riktningen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

a Skriv om ekvationen på dimensionslös form för problemet i figur 2.

b Identifiera de dimensionslösa grupperna som uppkommer i den dimensionslösa formen av Navier-Stokes ekvation och förklara vad de betyder.

c En flygplansbyggare vill bygga en vattentunnel för att testa nya former på flygplansvingar. Byggaren har lyckats bygga en 1 : 10 modell av ett *riktig* flygplan. En erfaren pilot berättar att ett riktigt flygplan flyger med en hastighet på 150 km/h när det ska landa. Byggaren vet också att de viskösa effekterna är signifikanta under landningen ($\rho_{luft} \approx 1.183\,\mathrm{kg/m^3}$ och $\mu_{luft} \approx 1.84 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa \cdot s}$). Så, vad ska tunnelns hastighet vara för att försäkra dynamisk likformighet? Antag $\rho_{vatten} = 988\,\mathrm{kg/m^3}$ och $\mu_{vatten} = 0.548 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ vilket motsvarar en vatten temperatur på 50°C och atmosfärstryck.

d Vad är drag kvoten $D_{prototyp}/D_{modell}$?

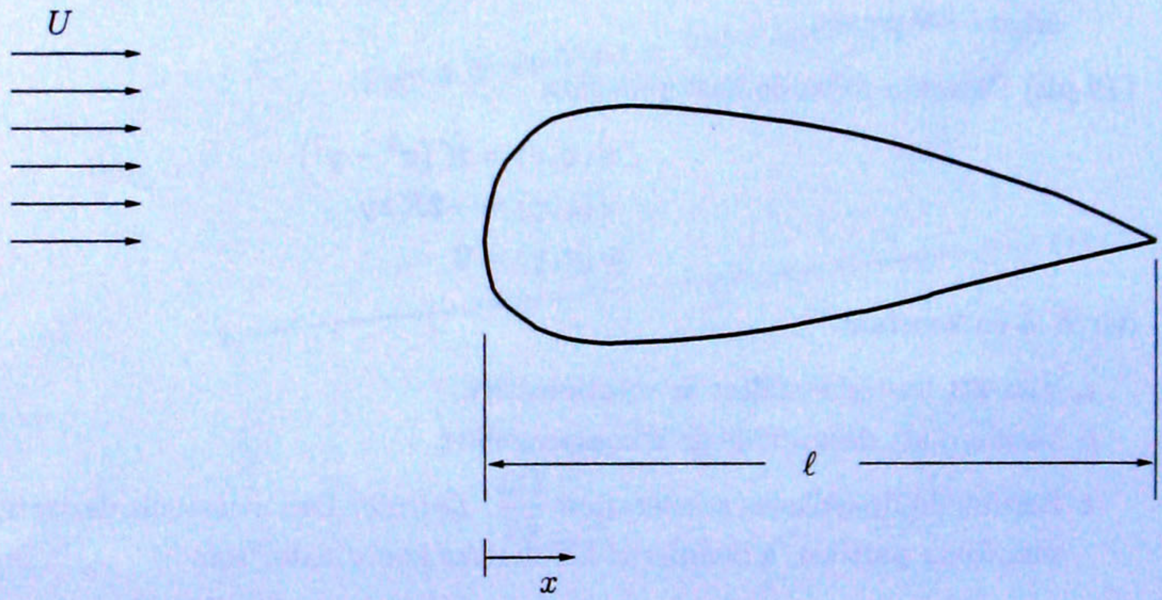

Figure 2: Problem 4: Skalningsparametrar.

5. (*15 poäng*) Luft vid 40°C och 1 atm ($\rho_{luft} = 1.13\,\mathrm{kg/m^3}$, $\nu_{luft} = 1.66 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$) flödar i 16 m/s förbi en platta, se figur 3. Ett Pitotrör, placerat 3 mm från väggen, utvecklar en manometerhöjd $\Delta h = 10$ mm av Olja SAE-30, $\rho_{olja} = 1260\,\mathrm{kg/m^3}$.

a Beräkna hastigheten vid positionen x nedströms. *Ledtråd:* Använd Bernoullis ekvation,

$$\frac{1}{2}q^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{konstant}$$

b Uppskatta nedströmspositionen x för Pitotröret. Antag laminärt flöde, så att Blausius lösning given i figur 4 kan användas.

c Beräkna Re_x. Har vi verkligen laminärt flöde vid denna punkt?

d Skjuvspänningen vid plattans vägg kan bestämas genom

$$\tau_{wall} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

Vad är skjuvspänningen vid väggen? *Ledtråd:* använd figur 4 för att bestämma derivatan.

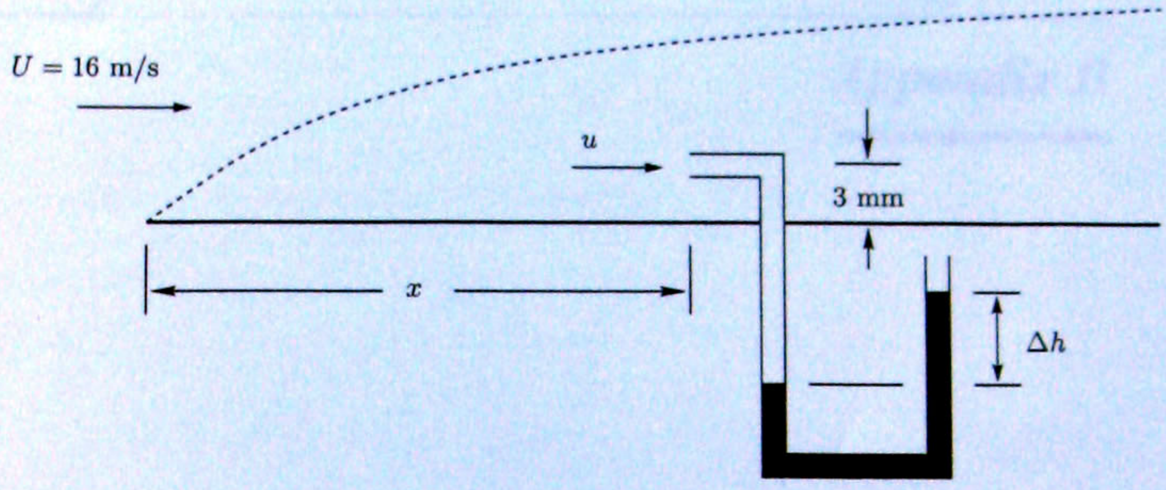

Figure 3: Problem 5: Fldet ver en platta.

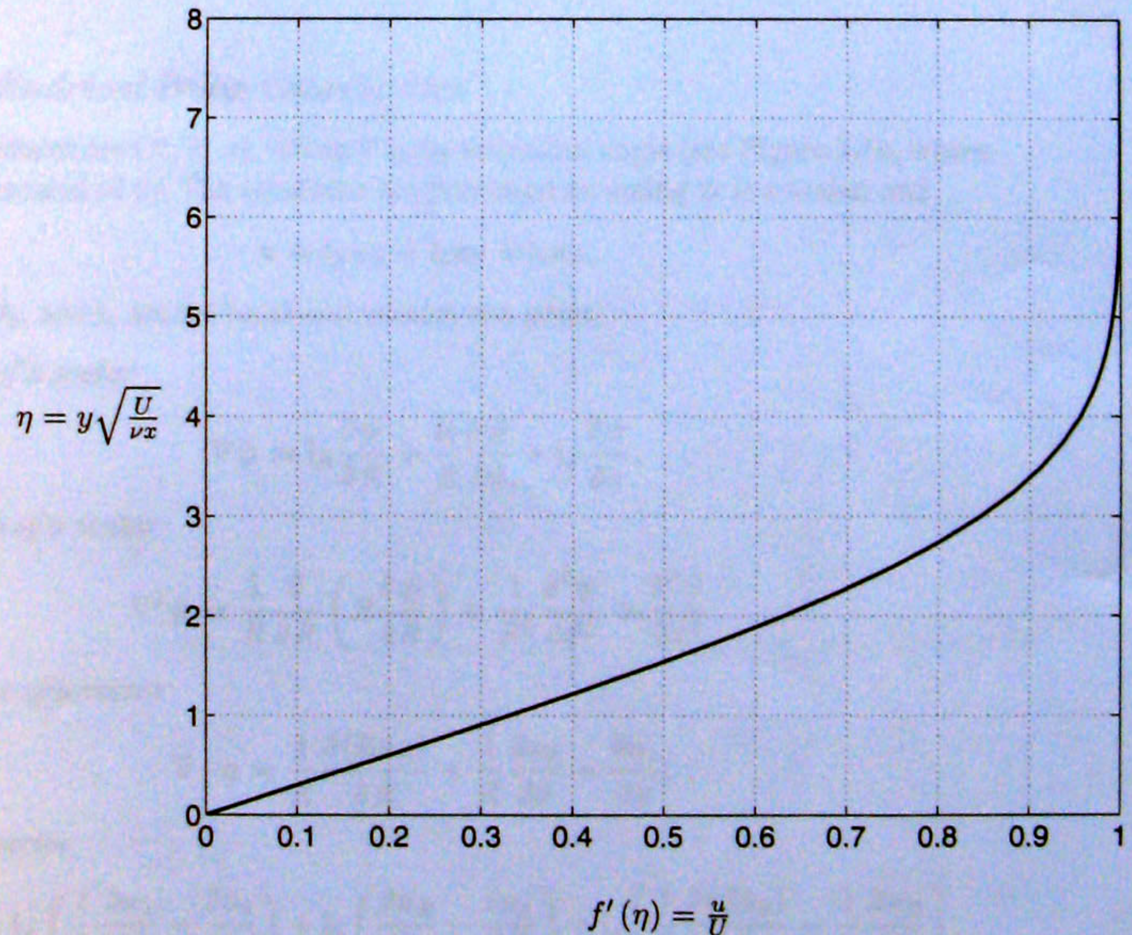

Figure 4: Problem 5: Blasius lösning.