Fluid Mekanik

TME055

1 Flersvarsfrågor

(*3 poäng för rätt svar, -1 poäng för varje fel svar*)

1. För att *kontinuums hypotesen* skall gälla behöver,

   a Den fria molykeläramedellängden (free mean path) måste vara mycket större än de makroskopiska förändringarna.

   b Medellängdskalan måste vara större än de makroskopiska förändringarna.

   c Medellängdskalan måste vara påsamma längdskala som den molekylära längdskalan.

   d Den fria molykeläramedellängden (free mean path) måste vara mycket mindre än de makroskopiska förändringarna.

2. $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ är en konsekvens av

   a Rotationsfritt flöde.

   b Inkompressibelt flöde.

   c Isotermiskt flöde.

   d Tvådimensionellt flöde.

3. Potentialflödesteori som använder *ett* potentialfält:

   a kan användas till tvåoch tredimensionella flöden med oändlig vorticitet.

   b kan användas till tredimensionella friktionsfria flöden.

   c kan användas till tvådimensionella viskösa gränskickt.

   d kan användas till tvådimensionella rotationsfria vortex flöden.

4. Vilket av följnade påståenden är *inte sant*:

   a Spänningstensorn är symmetrisk.

   b Spänningstensorn kan bero påflödet vid en tidigare tidpunkt.

   c Spänningstensorn och den symmetriska delen av deformationstensorn (strain rate tensor) kan relateras för luft med en skalär.

d Spänningstensorn kan endast bero på den symmetriska delen av deformationstensorn.

5. Dynamisk likformighet

   a kan användas för att beräkna två olika och godtyckliga flödesproblem på samma sätt.

   b kräver bara geometrisk likformighet vid ränderna av fluiden.

   c kräver bara att egenskaperna hos flödet är skalade.

   d kräver geometrisk likformighet och att egenskaperna hos flödet är skalde.

6. Vilket är det största problemet, när man försöker lösa turbulenta flöden *analytiskt*?

   a Dynamisk likformighetsskalning håller inte per definition.

   b Flödet är inte stationärt per definition.

   c Flödet kan inte vara rotationsfritt per definition.

   d Hastigheterna hos flödet är för höga för att lösa.

7. Transportegenskaperna viskositet and termiskdiffusivitet kan inte vara negativa, för att,

   a Det kan byrta mot konserveringen av impuls.

   b Det kan bryta mot konserveringen av inre energi.

   c Det kan bryta mot entropiproduktionen.

   d Det kan bryta mot kontinuutets principen.

2 Öppna frågor

1. (*20 poäng*) Börja från Reynolds transportteorem,

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{A(t)} F u_i n_i dA$$

   a Härled kontinuitetsekvationen genom att utnyttja att massan hos en fluid partikel inte ändras.

   b Härled Reynolds transportteorem for egenskapen f som förhåller sig linjärt till densiteten, $F = \rho f$.

c Beakta kroppskraften pga gravitationen, ρg_i, och ytkraften pga spänningarna, $\tau_{ij} n_i$, som verkar på fluidpartikeln. Härled impulsekvationen från resultatet i *b*.

d Den generella Newtonska spänningstensorn kan skrivas som

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu \left(\nabla \cdot \vec{u}\right) \delta_{ij}.$$

Använd detta och resultatet från *c* för att härleda impulsekvationen för en *inkompressibel* fluid.

2. (*19 poäng*) Givet följande hastighetsfält i cylindriska koordinater

$$u_r = \frac{A}{r}\,, \qquad u_\theta = Br\,, \qquad u_z = 0$$

där A och B är konstanter,

a Skriv ut skjuvspänningstensorn i polärcylindriska koordinater.

b Bestäm vorticitetsvektorn i polärcylindriska koordinater.

c Beräkna cirkulationen Γ runt en cirkel med radien $r = 1$ kring origo.

3. (*20 poäng*) Tankbilen i figur 1 innehåller vatten och komprimerad luft. Den komprimerade luften är reglerad så att en jetstråle med vatten flödar ut genom dysan med ett konstant volymflöde Q. Jetstrålens diameter är d och initialt är den totala massan hos tankebilen M_0.

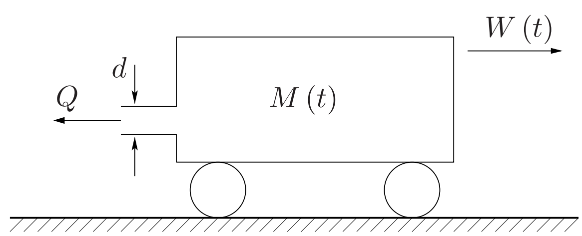

Figure 1: Problem 6.

Bilen står initialt stilla på horisontell mark.

a Välj en kontrollvolym som omger bilen och följer med bilen. Skriv ner kontinuitetsekvationen för detta system.

b Bortse från friktionskrafter och skriv ner implusekvationen.

c Sök massan M and bilens hastighet W som en funktion av tiden.

4. (*20 poäng*) Börja från den inkompressibla Navier-Stokes ekvationer.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

a Härled en ekvation för vorticiteten genom att ta rotationen $(\nabla\times)$ av denna ekvation. Använd följande samband:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \epsilon_{ijk}u_j\omega_k$$

där $u^2 = u_j u_j$.

b Motivera den fysikaliska meningen av varje term i vorticitetsekvationen.

c Mängden av vorticitet i ett inkompressibelt flöde, utan att ta hänsyn till riktning, mäts av $\omega^2 = \omega_i\omega_i$, kallat *enstropin*. Ta $\vec{\omega}\cdot$(vorticitetsekvationen) för att hitta transportekvationen för enstropin

$$\frac{D\frac{1}{2}\omega^2}{Dt} = \text{högerled}$$

d Innerprodukten av hastigheten och vorticiteten $H = u_i\omega_i$ kallas *helicitet*. Den är intressant för den försvinner vid tvådimensionella flöden och kan användas som en indikator om flödet är tredimensionellt.

Bilda en ekvation för H genom att ta $\vec{\omega}\cdot$(impulsekvationen) och kombinera det med enstropiekvationen som du härledde i *c*. Använd index notation i dina härledningar.

Fluid Mechanics
TME055

1 Multiple Choice Questions

1. d
2. b
3. d
4. d
5. d
6. b
7. c

2 Open Questions

1. Reynolds Transport Theorem

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{A(t)} F u_i n_i dA$$

a Setting $F = \rho$, we have

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho dV = 0$$

due to mass conservation. Using Reynolds transport theorem and Gauss theorem we get

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho u_i n_i \, dA = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\right] dV = 0$$

As the volume V is arbitrary, we finally get

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0}$$

b Setting $F = \rho f$ we have

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) dV + \int_A \rho f u_i n_i dA$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho f u_i)\right] dV$$

Using continuity equation we can rewritte the right hand side

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho f dV = \int_V \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] dV$$

Now we can identify the material derivative of f times ρ as the integrand on the right hand side, so

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho f dV = \int_V \rho \frac{Df}{Dt} dV$$

c The momentum equation can be derived from the integral relation for f found in b if we set $f = u_i$:

$$\int_V \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \underbrace{\int_V \rho \mathrm{g}_i dV + \int_A \tau_{ij} n_j dA}_{\text{Forces acting on a fluid particle}}$$

$$= \int_V \left[\rho \mathrm{g}_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right] dV$$

We can group all terms into a single volume integral on the left hand side

$$\int_V \left[\rho \frac{Du_i}{Dt} - \rho \mathrm{g}_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right] dV = 0$$

As the integration volume is arbitrary, we finally get

$$\boxed{\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \mathrm{g}_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}$$

d Newtonian stress tensor becomes

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu \underbrace{(\nabla \cdot \vec{u})}_{\substack{=0 \\ \text{Incompresible} \\ \text{fluid}}} \delta_{ij}$$

Substituting in the momentum equation c, we get

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\right)$$

If we assume that temperature differences are small within the fluid, $\mu \approx \textit{constant}$, so

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

As $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ for an incompressible fluid, we get

$$\boxed{\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

2. Velocity field in cylindrical coordinates

   a From Appendix B we have:

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{zr} & e_{z\theta} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & A/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   b The vorticity vector is:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2B \end{pmatrix}$$

   c The circulation can easily be computed using Stokes' theorem:

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, dA$$

$$\Gamma = 2B\,\pi r^2 = \boxed{2\pi B}$$

3. Applying integral forms to a finite region (tank car):

   a Mass conservation for a control volume surrounding the car gives

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\dot{M}^{out} = -\rho U_{jet} A$$

So, the rate of change of mass is equal to the mass flow leaving the control volume. In terms of the volumetric rate $Q = U_{jet}A$, and $A = \pi d^2/4$, it can be rewritten as

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = -\rho Q}$$

b Momentum conservation ($P = MW$) requires that

$$\frac{dP(t)}{dt} = F_{thrust}$$

Thus, the rate of change of momentum is equal to the thrust necessary to move the car. This can be rewritten as

$$\frac{d(MW)}{dt} = \dot{M}^{out}U_{jet} = \rho\frac{Q^2}{A}$$

$$\boxed{\frac{d(MW)}{dt} = \frac{4\rho Q^2}{\pi d^2}}$$

c As Q is constant, mass conservation equation can be directly integrated which gives

$$\boxed{M(t) = M_0 - \rho Q t}$$

Momentum equation can be rewritten by using mass conservation equation,

$$W\frac{dM}{dt} + M\frac{dW}{dt} = \rho\frac{Q^2}{A}$$

$$-\rho Q W + (M_0 - \rho Q t)\frac{dW}{dt} = \rho\frac{Q^2}{A}$$

then we can integrate both sides as

$$\int_0^W \frac{dW'}{W' + \frac{Q}{A}} = \rho Q \int_0^t \frac{dt'}{M_0 - \rho Q t'}$$

$$\ln\left(W' + \frac{Q}{A}\right)\Big|_0^W = -\ln\left(M_0 - \rho Q t'\right)\Big|_0^t$$

gathering terms and rearranging we can finally get a neat expression for velocity

$$\boxed{W(t) = \frac{4Q}{\pi d^2}\left(\frac{\rho Q t}{M_0 - \rho Q t}\right)}$$

4. Vorticity, enstrophy and helicity.

a Vorticity is defined as the curl of velocity, $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. We should also keep in mind that $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0$ for any flow, and $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ as we are dealing with incompressible flow. Let's analyse the curl of each term in the Navier-Stokes equation:

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\text{II}} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \nu\underbrace{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{IV}}\right)$$

Term I becomes

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial t}$$

Term II is the most complicated. We need to use the second identity to recast this term before taking the curl. Then we need the first identity to contract indices

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \underbrace{\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)}_{\text{curl of a gradient}} - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_l\omega_m\right)$$

$$= 0 \; - \; \delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_l\omega_m\right) \; + \; \delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_l\omega_m\right)$$

$$= -\delta_{il}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(u_l\omega_m\right) \; + \; \delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_l\omega_m\right)$$

$$= -\omega_m\frac{\partial u_i}{\partial x_m} \; + \; u_l\frac{\partial \omega_i}{\partial x_l}$$

Term III is straightforward

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad \text{curl of a gradient}$$

Term IV is

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_l}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_l \partial x_l}$$

And substituting each term, we end up with

$$\boxed{\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

b The two terms on the left hand side define the rate of change of vorticity for a fluid particle, that is, the material derivative of $\boldsymbol{\omega}$. The first term on the right hand side represents the rate of change of $\boldsymbol{\omega}$ due to stretching and tilting of vortex lines; and the last term is the rate of viscous diffusion of vorticity.

c By taking $\vec{\omega}\cdot$(vorticity equation), the left hand side of the enstrophy equation becomes

$$\omega_i\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \omega_i u_j\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \frac{1}{2}\omega^2}{\partial t} + u_j\frac{\partial \frac{1}{2}\omega^2}{\partial x_j}$$

$$= \frac{D\frac{1}{2}\omega^2}{Dt}$$

The first term on the right hand side becomes

$$\omega_i\omega_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_i\omega_j e_{ji}$$

where e_{ij} is the strain rate tensor. We could rewrite the last term in the enstrophy equation if we look at the second derivative of ω^2,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tfrac{1}{2}\omega^2\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\omega_i\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \underbrace{\omega_i\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

Thus, the enstrophy equation is

$$\boxed{\frac{D\frac{1}{2}\omega^2}{Dt} = \omega_i\omega_j e_{ji} + \nu\frac{\partial^2 \frac{1}{2}\omega^2}{\partial x_j \partial x_j} - \nu\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}}$$

d The derivation of a transport equation for $H = u_i \omega_i$ is carried out by taking $\vec{\omega}\cdot$(momentum equation). Terms on the left hand side can be rewritten by using vorticity equation,

$$\omega_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \omega_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i \omega_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial (u_i \omega_i)}{\partial x_j} - u_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{DH}{Dt} - u_i \left(\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

The first term on the right hand side becomes

$$\omega_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial (\omega_i p)}{\partial x_i}$$

And the last term in the helicity equation is rewritten in terms of the second derivative of H

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \omega_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\omega_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \underbrace{u_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{cancels out with a term on the LHS}} + \underbrace{\omega_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$

Therefore, we finally get

$$\boxed{\frac{DH}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\omega_i p)}{\partial x_i} + u_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_j} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}}$$