Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, måndag 27 oktober 2003

Laminär kanalströmning

Genom en lång kanal med bredden $2a$ flyter en vätska med konstant densitet ρ. Trycket i ett tvärsnitt (y-led) är p_1 och l längdenheter därifrån längs kanalen (x-led) är trycket p_2. $u = 0$ för $y = \pm 2a$ - no slip condition.

Tryckgradienten samt viskösa krafter (friktion) ger upphov till en hastighetsprofil u.

Skjuvkraften i x-led är $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, där μ är den kinematiska viskositeten.

Betrakta ett litet volymselement $dV = dx\,dy\,dz$. Nettokraften i strömriktningen är $-\frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz$.

Total skjuvkraft på volymselementet är $(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy - \tau) dx\,dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} dx\,dy\,dz = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) dx\,dy\,dz$.

Newtons andra lag ($\Sigma F = m\,a$) samt villkoret om laminär ($a = 0$) strömning ger $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx\,dy\,dz - \frac{dp}{dx} dx\,dy\,dz = 0 \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} = 0$. Vi har att $\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} = G \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G$. Randvärdena att $u = 0$ för $y = \pm 2a$ ger då att $u = \frac{G}{2\mu}(a^2 - y^2)$, för $-a < y < a$.

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, torsdag 30 oktober 2003

Kontinuumshypotesen

Makroskopiska storheter som hastighet, densitet, tryck och temperatur varierar kontinuerligt från punkt till punkt i rummet (vilket innebär att vi kan använda differentialkalkyl). Värdet definieras av medelvärdet över ett stort antal molekyler.

På längdskalan L_1, ~ partiklarnas storlek, varierar den makroskopiska storheten kraftigt. På L_2 är storheten i det närmaste konstant. Längdskalan L_3 är den skalan vi vill betrakta ett system i. Kontinuumshypotesen är då giltig om $L_1 \ll L_2 \ll L_3$.

Def fluidpartikel: En fluidpartikel är en punkt (storleksordning L_2) som rör sig med den lokala fluidhastigheten.

Det lagrangeska betraktelsesättet fokuserar på fluidpartikel i strömningen och följer den. (Ex temperaturen $T = T(X_i, \widehat{t})$ vid tiden $\widehat{t}$ hos den fluidpartikel som vid tiden $\widehat{t} = 0$ befann sig i punkten X_i.)

Det Eulerska betraktelsesättet studerar en fix punkt i rummet medan tiden fortskrider. (Ex temperaturen $T = T(x_i, t)$ i punkten x_i vid tiden t.)

Def materiella derivatan: Den materialla derivatan är en operator som ger oss möjlighet att formulera en tidsderivta som följer en fluidpartikel i eulerska variabler. Om F är en egenskap: $F = F_L(X_i, \widehat{t}) = F_E(x_i, t)$.

Transformation mellan Euler och Lagrange:

$$\begin{cases} x_i = r_i(X_i, \widehat{t}) \\ t = \widehat{t} \end{cases} \Rightarrow F = F_L(X_i, \widehat{t}) = F_E(x_i = r_i(X_i, \widehat{t}), t = \widehat{t})$$

$$\frac{\partial F_L}{\partial \widehat{t}} = \frac{\partial F_E}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial \widehat{t}}}_{=v_i} + \frac{\partial F_E}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \widehat{t}} = v_i \frac{\partial F_E}{\partial x_i} + \frac{\partial F_E}{\partial t}$$

$\frac{\partial}{\partial \widehat{t}} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, där $\frac{\partial}{\partial t}$ motsvarar lokal förändring och $v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ motsvarar advektiv förändring.

Masskonservering ($\Rightarrow$kontinuitetsekvationen)

Betrakta en del av en fluid, med volymen V, ytan S och densiteten ρ. Flödet genom ytan S är $\int_S \rho u_i n_i dS$. Totala massan i V är $\int_V \rho dV$. Massbalans ger att $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \int_S \rho u_i n_i dS$. Gauss sats samt att volymen V kan väljas godtyckligt ger att $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = -\mathrm{div}(\rho u_i)$ eller på vektorform $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$. Antag att fluiden är inkompressibel. Då är ρ konstant $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$.

Newtons andra lag $m\,\mathbf{a} = \Sigma\mathbf{F}$($\Rightarrow$impulsekvationen)

Antag att vi har en fluid med masskrafter $F_i(x_i)$, hastighet $u_i(x_i)$ och ytspänning R_i. Då är

$m\,\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\int_V \rho u_i dV$; $\Sigma\mathbf{F} = \int_V \rho F_i dV + \int_S R_i dS$

Eulerska koordinater: $\frac{D}{Dt}\int_{V_{fix}} \rho u_i dV = \int_{V_{fix}} \rho F_i dV + \int_{S_{fix}} R_i dS$.

Vi kan inte direkt använda Gauss sats på ytintegralen eftersom R_i inte är relaterad till någon ytnormal. Spänningsanalysen reder ut detta åt oss.

Späningsanalys

Spänning = kraft per ytenhet.

Cauchys spänningsprincip:

En kropp utsätts för ytkrafter R_i och volymskrafter F_i. $\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta R_i}{\Delta S} = \frac{\partial R_i}{\partial S} = t_i^{(\widehat{n})}$. Momentjämvikt ger $\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta S} = 0$.

Spänningstensorn

Endast tre spänningsvektorer behövs för att fullständigt beskriva spänningstillståndet i en given punkt. Låt $\widehat{e}_1$, $\widehat{e}_2$, $\widehat{e}_3$ vara ortogonala enhetsvektorer. Då är

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(\widehat{e}_1)} = t_1^{(\widehat{e}_1)}\widehat{e}_1 + t_2^{(\widehat{e}_1)}\widehat{e}_2 + t_3^{(\widehat{e}_1)}\widehat{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(\widehat{e}_2)} = t_1^{(\widehat{e}_2)}\widehat{e}_1 + t_2^{(\widehat{e}_2)}\widehat{e}_2 + t_3^{(\widehat{e}_2)}\widehat{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(\widehat{e}_3)} = t_1^{(\widehat{e}_3)}\widehat{e}_1 + t_2^{(\widehat{e}_3)}\widehat{e}_2 + t_3^{(\widehat{e}_3)}\widehat{e}_3 \end{cases}, \text{ eller kortare } \mathbf{t}^{(\widehat{e}_j)} = t_i^{(\widehat{e}_j)}\widehat{e}_i.$$

$t_i^{(\widehat{e}_j)} = \sigma_{ji}$ kallas spänningstensorn.

Relation mellan spänningstensorn och en godtycklig spänningsvektor

Kraftbalans i en tetraeder med ytan dS. Spänningsvektorn $t_i^{(\widehat{n})} = t_i^{(\widehat{e}_j)} n_i = \sigma_{ji} n_i$.

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, måndag 3 november 2003

Impulsekvationen

$\frac{D}{Dt}(\rho u_i) = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$, innehåller 13 obekanta (ρ, u_i och σ_{ji}) på tre ekvationer. Vi behöver ett konstitutivt samband som relaterar spänning och hastighet.

Spänningstensorns symmetri

Momentjämvikt ($\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$) kring origo på ett fluidelement i jämvikt ger

$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{\widehat{(n)}} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV = 0$

Men $t_k^{\widehat{(n)}} = \sigma_{qk} n_q \Rightarrow \{\text{Gauss sats}\} \Rightarrow \int_V \varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_q}(x_j \sigma_{qk}) + x_j \rho F_k\right] dV = 0$

$\Leftrightarrow \int_V \varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial x_j}{\partial x_q}\sigma_{qk} + x_j \left(\frac{\partial \sigma_{qk}}{\partial x_q} + \rho F_k\right)\right] dV = 0$

Men $\frac{\partial x_j}{\partial x_q} = \delta_{jq}$ och $\frac{\partial \sigma_{qk}}{\partial x_q} + \rho F_k = \frac{D}{Dt}(\rho u_i) = 0$ vid jämvikt, så integralen reduceras till $\int_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} dV = 0$. Dessutom kan V väljas godtyckligt $\Rightarrow$ integranden $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$

Eftersom ε_{ijk} är antisymmetrisk måste σ_{jk} vara *symmetrisk* eller lika med 0, d v s $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$.

Deformationsanalys

Fasta ämnen deformeras tills dess de inre krafterna balanseras av de yttre krafterna. Fluider kan ej motstå pålagda skjuvkrafter och deformeras så länge kraften verkar. Vi måste studera deformationshastigheter.

Rörelseuppdelning (kinematisk betraktelse)

Antag att en fluid i punkten P har hastigheten v_j och att en liten bit ($dr_i = \alpha_i ds$) därifrån i punkten P' hastigheten är $v_j' = v_j + dv_j$. Totala rörelsen utgörs av translation, rotation och deformation.

Serieutveckla v_j' kring P m a p dr_j:

$v_j' = v_j + dv_j = v_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dr_i + ...$

$$\Rightarrow dv_j \approx \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dr_i = \left\{ A = \frac{1}{2}\underbrace{(A + A^T)}_{symmetrisk} + \frac{1}{2}\underbrace{(A - A^T)}_{antisymmetrisk} \right\} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right] dr_i =$$

$$dv_j^{(s)} + dv_j^{(r)}$$

Antisymmetrisk tensor (rotation)

Den antisymmetriska delen motsvarar rotatonen och innehåller endast tre olika komponenter $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$. Man kan ersätta den med en dualvektor $\omega_i = \text{rot}(v_k) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$. Då blir $dv_j^{(r)} = \varepsilon_{jki}\left[\frac{1}{2}\omega_k\right] dr_i$. Om vorticitetsvektorn $\omega_k = 0$ kallas strömningen rotationsfri.

Symmetrisk tensor (deformation)

Den symmetriska delen motsvarar deformationen och innehåller sex komponenter $\begin{bmatrix} N_1 & O_1 & O_2 \\ O_1 & N_2 & O_3 \\ O_2 & O_3 & N_3 \end{bmatrix}$. Normalriktningen ger töjningshastigheten medan tangentriktningen ger skjuvningshastigheten på följande sätt:

Töjningshastighet $dv_k^{(es)} = \alpha_k \, \alpha_j dv_j^{(s)}$, där α_k är normalriktningen och $\alpha_j dv_j^{(s)}$ är beloppet i normalriktningen.

Skjuvningshastighet $dv_j^{(ss)} = dv_j^{(s)} - dv_j^{(es)}$.

Sammanfattning

Den relativa hastigheten mellan P och P' kan alltså delas upp i rotationsrörelse samt deformationsrörelse. Deformationen kan sedan delas upp i töjning och skjuvning. Vi har följande:

$$dv_j^{(r)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dr_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{jki}\omega_k dr_i$$
$$dv_j^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dr_i$$
$$dv_k^{(es)} = \alpha_k \, \alpha_j dv_j^{(s)}$$
$$dv_j^{(ss)} = dv_j^{(s)} - dv_j^{(es)}$$

Exempel

Hastigheten i en fluid är $v_j = (cx_2, 0, 0)$. $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = c$ och övriga partialderivator är lika med noll. Detta ger $dv_1^{(r)} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_1})dr_i = \frac{1}{2}cdr_2 = \frac{1}{2}c\,\alpha_2 dS$

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, torsdag 6 november 2003

Konstitutiva samband

Spänningstensorn

Mekaniskt tryck $p_m = -\frac{\sigma_{ii}}{3}$ (medelvärdet av spåret av σ_{ij}).

$\sigma_{ij} = -p_m\delta_{ij} + \tau_{ij}$, där τ_{ij} är den viskösa späningstensorn.

Ex.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 2 & 0 \\ A & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma_{ij}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{p_m\delta_{ij}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\tau_{ij}}$$ {Notera att $\tau_{ii} = 0$ alltid gäller.}

Newtons viskositetslag

Modell som relaterar spänningstensorn och deformationshastighetstensorn. Antag att vi har linjärt samband och att isotropa egenskaper. Vi vet att spänningstensorn är symmetrisk ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) och att $\tau_{ii} = 0$.

Den viskösa spänningstensorn kan uttryckas som en linjärkombination av $v_{k,l}$ genom

$\tau_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$. C_{ijkl} innehåller 81 s k viskositetskoefficienter.

Isotropi

En isotrop tensor kan alltid uttryckas m h a δ_{ij} och man kan visa att $C_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$ så att de 81 koefficienterna reduceras till endast tre oberoende koefficienter.

Symmetri

Symmetri m a p i och j ger $C_{ijkl} = C_{jikl}$

$\Rightarrow \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) + \gamma(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jl}\delta_{ik}) + \lambda\underbrace{(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ji}\delta_{kl})}_{=0,\,\text{ty}\,\delta\,\text{symm}} = 0$

$\Rightarrow \mu = \gamma$

$\Rightarrow C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$.

Men $\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk} = \delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl}$ och $\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{ij}\delta_{lk}$, så C_{ijkl} är symmetrisk även m a p k och l.

Spåret $\tau_{ii} = 0$

$\Rightarrow C_{iikl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = [\mu(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik}}_{=2\delta_{ik}\delta_{il}=2\delta_{kl}}) + \lambda\underbrace{\delta_{ii}\delta_{kl}}_{=3\delta_{kl}}]\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = 0$

$\Rightarrow 2\mu\delta_{kl} + 3\lambda\delta_{kl} = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

$v_{k,l} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) + \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) = D_{kl} + V_{kl}$ där deformationshastigeten D_{kl} är en symmetrisk tensor och rotationshastigheten V_{kl} är antisymmetrisk. Härav får vi att $\tau_{ij} = C_{ijkl}(D_{kl} + V_{kl}) = C_{ijkl}D_{kl}$ eftersom produkten av en symmetrisk tensor och en antisymmetrisk tensor alltid är lika med noll. Vi får då *Newtons viskositetslag* som

$$\tau_{ij} = 2\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})D_{kl} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}D_{kk}$$

Inkompressibel fluid

Om vi har en inkompressibel fluid är ρ konstant och kontinuitetsekvationen ger $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = D_{kk} = 0$ vilket leder till att $\sigma_{ij} = -p_m\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$.

Impulsekvationen

Med de härledningar vi gjort har vi nu ett konstitutivt samband som relaterar spänning och hastighet och vi kan nu ställa upp impulsekvationen igen.

$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i$

$= -\frac{\partial}{\partial x_j}(p_m\delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu D_{ij}) + \rho F_i$

$= -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \rho F_i$

$= -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \rho F_i$.

Men $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ p g a kontinuitetsekvationen vilket ger oss *impulsekvationen*:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + F_i$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kallas den kinematiska viskositeten och μ är den dynamiska viskositeten.

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, måndag 10 november 2003

Randvillkor

Låt $\widehat{n}$ och $\widehat{t}$ vara normalvektor respektive tangentialvektor till den begränsande ytan.

Impermeabilitetsvillkor: $\mathbf{u} \cdot \widehat{n} = 0$

No-slip-villkor: $\mathbf{u} \cdot \widehat{t} = 0$ (Viskös fluid)

Exempel: 2D kanal med bredd $2h$ som flyter i x-riktning. Om båda randvillkoren ska vara uppfyllda gäller att

$v \,|_{y=\pm h} = 0$

$u \,|_{y=\pm h} = 0$

Förenklingar av Navier-Stokes

Inkompressibilitet: ρ konstant

Stationäritet: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

För 2D: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $w = 0$

Inviskös (friktionsfri): $\nu = 0$

Inga masskrafter: $F_i = 0$

Fullt utbildad strömning innebär att gradienter i strömningsriktningen är noll, d v s $\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$.

Specialfall 1

Antag stationärt, friktionsfritt flöde utan masskrafter. Impulsekvationen säger

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{=0} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\nu}_{=0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho \underbrace{F_i}_{=0}$$

$$\Rightarrow u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$\Rightarrow \int u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dV = -\int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\, dV$
$\Rightarrow u_j u_j = -\frac{1}{\rho} p + \text{konst}$
Detta ger oss *Bernoullis ekvation*, där $u = |u_i|$

$$p + \frac{1}{2}\rho u \quad = \quad \text{konst}$$

Denna ekvation kan exempelvis tänkas användas för att beräkna llyftkraten på en vinge.

Specialfall 2 (Kanalströmning, 2D)

Antag stationär, fullt utbildad strömning, inga masskrafter.
$v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
Kontinuitet:
$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = 0$
Vi har
$\begin{cases} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$

Definitioner

Strömlinjer är linjer som tangerar hastighetsvektorn i varje punkt

$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial z}{w}$

Strömtuber begränsas av ett antal strömlinjer

Masskonservering: $\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{A_1}{A_2}$ i en strömtub med ingångsarea A_1 och utgångsarea A_2.

Partikelbanor beskriver fluidpartikelns position som funktion av tiden. Om flödet är stationärt gäller att strömlinjen är lika med partikelbanan. Vid instationärt flöde gäller inte detta.

Strömfunktionen: Om strömningen är tvådimensionell defineras strömfunktionen Ψ av

$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}$, Ψ är konstant längs en strömlinje.

Tvådimensionell ström kan beskrivas m h a en enda ekvation, uttryckt i Ψ.

Vorticitet (rotation): $\omega = \text{rot}(\mathbf{u})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_x & = & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y & = & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z & = & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Vorticitetsekvationen: Rotationen av impulsekvationen:

$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$

Termerna i ekvationens högerled tolkas som

$\vec{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ deformar vorticitetsfältet

$\nu \nabla^2 \vec{\omega}$ viskös diffusion som producerar vorticitet vid väggar

Dynamisk likformighet

Geometrisk likformighet

Tänk dig två kanaler med bredd c_1 respektive c_2. I kanalerna ligger två hinder med bredd a_1, a_2 samt längd b_1, b_2. Strömningshastigheten i kanalen är v. Om geometrisk likformighet gäller måste

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Inför en längd- och en hastighetsskala, L och U, exempelvis $L = a$ och $U = v$. Skapa de dimensionslösa storheterna

$\mathbf{x}' = \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}\right)$,

$\mathbf{u}' = \left(\frac{u}{U}, \frac{v}{U}, \frac{w}{U}\right)$,

$p' = \frac{p}{\rho U^2}$ samt

$t' = \frac{tU}{L}$

Kontinuitetsekvationen ger

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(Uu')}{\partial(Lx')} + \frac{\partial(Uv')}{\partial(Ly')} + \frac{\partial(Uw')}{\partial(Lz')} = \frac{U}{L} \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$

$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$

Impulsekvationen

$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = -\frac{U^2}{L} \nabla p' + \frac{\nu U}{L^2} \nabla^2 \mathbf{u}'$

Dividera med $\frac{U^2}{L}$ så fås den *dimensionslösa impulsekvationen*

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \quad = \quad -\nabla p' + \underbrace{\frac{\nu}{UL}}_{=1/Re} \nabla^2 \mathbf{u}'$$

Reynoldstalet (Re): $Re = \frac{UL}{\nu}$

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsning, torsdag 13 november 2003

Navier-Stokes: $\rho\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p_t}{\partial x_i} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial^2 v_q}{\partial x_i \partial x_q} + \rho b_i}_{\text{spänning}}$

Bernoullis ekvation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p + \rho\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Bernoullis ekvation säger att då hastigheten ökar måste trycket minska. Detta utnyttjas av flygplansvingar. Strömtuberna på ovansidan av vingen trycks ihop och hastigheten ökar vilket medför en tryckminskning och därmed en lyftkraft.

Vorticitetsekvationen

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{\vec{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}}_{\text{omfördelar}} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{\omega}}_{\text{skapar}}$$

Vorticitetsekvationen är en balansekvation där den första termen uppkommer p g a hastigheten som omfördelar vorticiteten, medan den andra termen orsakas av friktionen och är den del som skapar vorticiteten.

Reynoldstalsoberoende

Inom ett visst intervall kan ett system vara *reynoldstalsoberoende*, vilket gör systemet skalbart. Detta är användbart när man vill undersöka en egenskap men har svårt att göra det i naturlig skala. Systemet kan skalas inom intervallet med bibehållna egenskaper.

Höga och låga reynoldstal

(NS'): $\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u}$ säger att tröghet = tryckkraft + viskösa krafter.
Dimensinslös NS: $\mathbf{u}'\cdot\nabla'\,\mathbf{u}' = -\nabla'\,p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\mathbf{u}'$
$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{UL}{\mu/\rho} \sim \frac{\text{tröghetskrafter}}{\text{viskösa krafter}}$
$\nu_{\text{luft}} = 15,2\cdot 10^{-6}$
Tröghet: $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} \sim \frac{U^2}{L}$
Viskösa krafter: $\nu\nabla^2\mathbf{u} \sim \frac{U}{L^2}$

Lågt Re-tal

Viskösa krafter är mycket större än tröghetskrafterna så att
$0 = -\nabla'\,p' + \frac{1}{Re}\nabla'^2\mathbf{u}'$
eller med dimensioner

$$\nabla p \quad = \quad \mu\nabla^2\mathbf{u}$$

Jämför detta med kanalexemplet i första föreläsningen!

Högt Re-tal

Tröghetskrafterna är nu mycket större än de viskösa krafterna vilka då kan försummas:
$\mathbf{u}'\cdot\nabla'\,\mathbf{u}' = -\nabla'\,p'$
och med dimensioner fås *Eulers ekvation*

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad = \quad -\nabla p$$

Observera att $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ eftersom $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0$ enligt ej nämnda antaganden i (NS') ovan. (Redaktörens anmäkning)

Randvillkor

- No-slip
- Impermeabilitet (kopplat till normal- (tryck-)krafterna)

Eulers ekvation behöver ej no-slip-villkoret, men det måste finnas med av fysikaliska orsaker. Inför gränsskikt med tjocklek δ. Gränsskiktet definieras som ett område där viskositeten och tröghetskrafterna är av samma storleksordning. Detta gränsskikt är väldigt viktigt för olika fysikaliska fenomen, som värmeöverföring, flygplansvingars lyftkraft...

(Läs kapitel 9 själv i boken!)

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsningsanteckningar, måndag 17 november 2003

Friktionsfri strömning

För friktionsfri strömning gäller

$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p$

Cirkulation: $\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \text{konstant}$

Rotationsfri strömning (potentialströmning, irrotational motion)

Om cirkulationen $\Gamma = 0$ för alla kurvor C så är strömningen rotationsfri. Eftersom rotationen

$\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$

kan vi definiera en strömpotential Φ sådan att

$\mathbf{u} = \nabla\Phi$

som uppfyller Laplaces ekvation, d v s

$\nabla^2\Phi = 0.$

Bernoullis ekvaton

Antag att vi har stationär, friktionsfri strömning. Då reduceras NS till

$\rho q \frac{\partial q}{\partial l} = -\frac{\partial p}{\partial l}$

Det totala trycket = dynamiska trycket + statiska trycket = konstant:

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho q^2 + p\right) = 0$

Gränsskikt

Gränsskikt är områden där viskösa effekter har väsentlig inverkan på strömning vid höga Re-tal.

- Vorticitet produceras vid ytan genom att no-slip-villkoret ska vara uppfyllt
- L $>> \delta$
- Vorticiteten sprider sig "sakta" iväg från ytan

Stationärt, 2D

Låt Π och Λ vara tryckskillnaderna i x- respektive y-riktning, U karakteristisk hastighet i x-led,V karakteristisk hastighet i y-led, L karakteristisk längd i x-led samt δ gränsskiktets tjocklek. Kontinuitetsekvationen säger att

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U/L} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim V/\delta} = 0 \Rightarrow V \sim \frac{U}{L}\delta$$

Vi vill förenkla NS:

Medströms: $$\underbrace{\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim U\frac{U}{L}} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\sim V\frac{U}{\delta}=U\frac{U}{L}}}_{\text{samma storleksordning}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\sim\frac{\Pi}{\rho L}} + \underbrace{\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim\nu\frac{U}{L^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\sim\nu\frac{U}{\delta^2}}}_{\delta\ll L\Rightarrow\nu\frac{U}{L^2}\ll\nu\frac{U}{\delta^2}}$$

Tvärströms: $$\underbrace{\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{\sim U\frac{V}{L}=\frac{U^2}{L}\frac{\delta}{L}} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim V\frac{V}{\delta}=\frac{U^2}{L}\frac{\delta}{L}}}_{\text{samma storleksordning}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\sim\frac{\Lambda}{\rho\delta}} + \underbrace{\underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim\nu\frac{V}{L^2}=\nu\frac{U\delta}{L^3}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim\nu\frac{V}{\delta^2}=\nu\frac{U}{L\delta}}}_{\delta\ll L\Rightarrow\nu\frac{U\delta}{L^3}\ll\nu\frac{U}{L\delta}}$$

Vi får alltså

Medströms: $\frac{\Pi}{\rho L} \sim \frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2}$

Tvärströms: $\frac{\Lambda}{\rho\delta} \sim \frac{U^2\delta}{L^2} \sim \frac{\nu U}{L\delta}$

$\Rightarrow \frac{\Lambda}{\Pi} \sim \frac{\delta^2}{L^2}$

Observera att NS tvärs strömriktningen är en storleksordning mindre än medströms, medan tryckskillnaden är två storleksordningar mindre. Detta innebär att om p_0 är trycket alldeles utanför gränsskiktet så är

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x}$

eftersom tryckskillnaden i x-led är mycket större än den i y-led.

Bernoullis ekvation ger nu om u_o är hastigheten i x-led alldeles utanför gränsskiktet att

$u_0\frac{du_0}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}$

och vårt slutliga förenklade uttryck för Navier-Stokes ekvationer blir

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_0\frac{du_0}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsningsanteckningar, måndag 24 november 2003

(Föreläsningen tillika med tavelanvändningen var ostrukturerad, så förmodligen är dessa anteckningar det också.)

Repetition

Repetition av högt och lågt Re-tal, gränsskikt. Prandtls gränsskiktsekvationer:

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_0\frac{dU_0}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Strålar och vakar (läs själv)

Vakar bildas på baksidan av föremål som ligger i en strömmande fluid. Ett exempel på strålar är vattenstrålar. Om M är total impulstransport per längdenhet gäller för strålar att

$$\frac{dM}{dx} = 0.$$

Kan detta gälla för en enskild fluidpartikel i strålen?

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy = 2\rho \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{du}{dx}dy$$

Integrera gränsskiktsekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\frac{du}{dx}dy + \int_{-\infty}^{\infty} v\frac{du}{dy}dy0 = \nu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy = \nu\left[\frac{du}{dy}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v\frac{du}{dy}dy0 = \{\text{P I}\} = [uv]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{dv}{dy}dy = \{\text{KE}\} = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{du}{dx}dy \ \square$$

Kinetisk energi

Utgå från Prandtl, konstant U_0

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial y} = \nu u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{1}{2}v\frac{\partial}{\partial y}(u^2) = ... = -\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2)$$

Viskositeten utjämnar impulsen, omfördelning av kinetisk energi. (Läs kap 11!)

Separation och avlösning

Betrakta en yta med strömning utanför den. Lägg koordinatsystemet så att x följer ytan och y följer normalen till ytan. Då gäller för avlösningspunkten, d v s där flödet inte längre följer ytan laminärt, att

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, samt $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} > 0$.

(6.27): $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{\vec{\omega}\cdot\nabla\mathbf{u}}_{=0 \text{ vid 2d}} + \nu\nabla^2\vec{\omega}$

Stationär strömning medför att

$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \mathbf{u}\cdot\nabla\vec{\omega} = \nu\nabla^2\vec{\omega}$.

Sätt

$\zeta = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

$\Rightarrow \mathbf{u}\cdot\nabla\zeta = \nu\nabla^2\zeta$

På väggen ($y = 0$) gäller

$v = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow \zeta = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \Rightarrow \zeta < 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} < 0 \Rightarrow \zeta > 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

NS i x-riktning, med randvillkor:

$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0 \end{cases}$

För $y = 0$ gäller då i avlösningspunkten

$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\nu\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{>0}$

För avlösningspunkten är alltså tryckgradienten i x-led större än noll

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

Lyftkraft

Motstånd - viskösa krafter, lyftkraft - inviskös (och viskös) effekt

$$L \sim \rho\Gamma U$$

Magnuseffekten (Robineffekten)

En kropp som roterar i ett hastighetsfält genererar en lyftkraft vinkelrät mot strömningsriktningen på grund av att friktionen mot bollen gör att ett övertryck bildas på en sidan där bollens rotation gör att strömningen motverkas, medan ett undertryck bildas på andra sidan eftersom rotationen medverkar till strömningen.

Strömningslära och kontinuumsmekanik

Föreläsningsanteckningar, torsdag 27 november 2003

(Föreläsningen tillika med tavelanvändningen var ostrukturerad, så förmodligen är dessa anteckningar det också.)

Instabilitet (kap 17 - 18)

- *Inga* strömningar är stabila (störningar ökar)
- Dynamiken är komplex $\Rightarrow$ alla möjligheter kan inte utredas
- Analysen ger enbart en fingervisning om *huruvida* instabilitet kan komma att uppträda - inte när och hur.

Linjär instabilitetsteori

Undersöker om flödet är stabilt eller ej. Transitionsområdet är det område där en störning spontant förstärks innan flödet övergår till turbulent flöde. Principen för teorin är att överlagra en liten störning och se vad som händer. Störning motsvaras av vågtal. Mycket små eller stora vågtal medför oftast stabilitet.

Turbulenta fläckar

Transitionsområdet börjar vid ett visst kritiskt reynoldstal och går igenom några karakteristiska faser med ökande turbulent intensitet: Tollmien-Schlichting-vågor, 3d-vågor, bristande vorticiteter och turbulenta fläckar. Efter transitionsområdet är flödet helt turbulent och kommer att fortsätta vara det.

Egenskaper

- Ickelinjärt fenomen $\Rightarrow$ struktur överallt
- Oregelbunden $\Rightarrow$ statistiska metoder måste tillämpas
- Diffusiv
- Stora Re
- 3D

- Dissipativ$\Rightarrow$ energi måste hela tiden tillföras
- Kontinuumsegenskap$\Rightarrow$ NS är gällande
- Strömningsegenskap $\Leftrightarrow$ beror hela tiden på strömningen

Reynoldsdekomposition

För att studera turbulenta flöden delar man upp hastigheten, $u_i(t)$, i en tidsmedelvärderad, konstant hastighet, U_i, och en fluktuerande hastighet, $u'_i(t)$, genom

$u(t) = U_i + u'(t)$.

Det gäller att

$\overline{u'_i(t)} = 0$, men

$\overline{u'v'} \neq 0$.

Vi får nu NS som

$\frac{\partial}{\partial t}(U_i + u'_i) + (U_j + u'_j)\frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u'_i) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(P + p') + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + u'_i)$,

Tidsmedelvärdera ekvationen

$\frac{\partial}{\partial t}U_i + \frac{\partial}{\partial t}\overline{u'_i} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \overline{u'_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}P - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U_i + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\overline{u'_i}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}U_i + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}P + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U_i$

Men

$\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = \underbrace{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{= 0 \text{ (KE)}} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$,

så vi får den tidsmedelvärderade ekvationen som

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}U_i + \rho U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i u_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}P + \rho\nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U_i$$

Den olinjära termen, $\rho\overline{u_i u_j}$, kallas reynoldsspänningstensorn och består av tio obekanta, så den kan inte bestämmas med våra fyra ekvationer.

Spektra (kap 19 - 20)

Kolmsgorov (1941) definierade minsta längdskalan i turbulenta flöden som

$\eta = f(\varepsilon, \nu)$.

Dissipationen

$\varepsilon \sim u^2/\frac{l}{u} = \frac{u^3}{l}$.

På något sätt hör detta samman med 5:3-lutningen i energispektra.