TMA690
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F3 / TM3
Datum: 2012-12-19, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel. 070-3088304
==

1. Finn den allmänna lösningen $u = u(x, y)$ till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(5p)

2. a) Antag att u är en harmonisk funktion i disken $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$ och att $u = 3\sin 2\theta + 1$ då $|x| = 2$. (θ är vinkeln i polära koordinater). Vad är max av u i $\bar{D}$ och vad är värdet av u i origo? (2+3p)
b) Om $\mathbf{x} = (x, y, z)$ så låt $\mathbf{x}^* = (x, y, -z)$. Varför kan inte

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|}$$

vara Greens funktion för området $\{(x, y, z) : z > 0\}$? (3p)

3. Betrakta problemet $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, $u(0, x, y, z) = f(x, y, z)$, $u_t(0, x, y, z) = g(x, y, z)$.
a) Använd Poissons formel för att finna u i fallet då $f = 0$ och $g = y + z$. (4p)
b) Antag att $f = 0$ och $g = g(x, y)$, dvs. g är oberoende av z. Använd "Hadamard's method of descent" och härled Poissons formel i två rumsdimensioner i detta fall. (4p)

4. Genom $u[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, t)dt$ definieras en distribution i $\mathbb{R}^2$. Visa att u satisfierar $\partial u/\partial x_1 + \partial u/\partial x_2 = 0$. (5p)

5. Låt D vara ett begränsat enkelt sammanhängande område i planet med slät rand ∂D och utåtriktad enhetsnormal n. Visa att den enda lösningen u till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u^3 = \frac{\partial u}{\partial t},\ (x, y) \in D,\ t \in [0, T]$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ för } (x, y) \in \partial D,\ t \in [0, T]$$
$$u(0, x, y) = 0 \text{ för } (x, y) \in D$$

är $u = 0$. (Ledning: Betrakta $\int_D u^2\, dxdy$.) (7p)

6. Låt $u = u(t, x)$ vara lösning till vågekvationen $u_{tt} = u_{xx}$ för $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ sådan att u har begränsade andraderivator. Låt

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/4t} u(s, x)\, ds.$$

a) Visa att $v(t,x)$ löser värmeledningsekvationen $v_t = v_{xx}$. (5p)
b) Visa att $\lim_{t\to 0} v(t,x) = u(0,x)$. (4p)

7. Formulera och bevisa Lax-Milgrams sats (existens och entydighet är tillräckligt). (8p)

Betygsgränser: 20-29 p ger betyget 3; 30-39 p ger betyget 4; 40-50 p ger betyget 5.

/HA