Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Magnus Önnheim , 0703-088304
20012–08–29 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Formulera Greenformler för ett begränsat område $D \subset \mathbb{R}^d$. Härleda medelvärdesatsen för Laplaceekvationen ur Greenformler. Hitta ett nödvändigt villkor på funktionen F så att randvärdeproblemet $\Delta u = F$ i D med Neumann randvillkoret $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ på randen är lösbart. Hur många sådana lösningar kan finnas? (10p)

2. Bestäm till vilken typ tillhör ekvationen $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$. Transformera till kanoniska formen i området $x, y > 0$ och i området $x > 0, y < 0$. (9p)

3. Skriv Poissonformeln för lösningen av värmeekvationen i $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Låt $u_1(x,t), u_2(x,t)$ vara 2 lösningar av den homogena värmeekvationen med Cauchydata $\phi_1(x)$ resp. $\phi_2(x)$ sådana att $|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq 0.001$ för alla x. Bevisa att i detta fall $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq 0.001$ för alla x och alla $t > 0$. (10p)

4. Ange motivering för definitionen av Fouriertransformation av en distribution. För vilket rum av distributioner defineras Fouriertransformation? Hitta Fouriertransformation av distributioner $\delta(x)$, $\delta'(x)$, x^2. (7p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och FEM för dem. (8p)

6. Berätta om integralekvationer av potentialteori och randelementmetoden för att lösa dem. (7p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 11. sept. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 8. Sept. De som behöver granskning kontakta mig med epost.

G.Rozenblioum

Partiella Diff. Ekvationer
TMA 690 , 2012-08-29

Lösningar

1. Villkoret:
$\Delta u = F$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$

Multiplicera ekvationen med 1 och integrera

$$\int_D \Delta u \cdot 1 dx = \int_D F dx$$

Använder Green 1:

$$\int_D \Delta u \cdot 1 \, dx = -\int_D \underbrace{\nabla u \cdot \nabla 1}_{=0} dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

$\Rightarrow$ Det nödvändiga villkoret

$$\int_D F dx = 0$$

Om en lösning till problemet finns, så är $u = u_0 + \text{const}$ (*) en annan lösning. Det kan finnas inga lösningar vilka inte ges av (*).

2. $u_{xx} + xy\, u_{yy} = 0$

$A = 1,\ B = 0,\ C = xy$

$D = B^2 - AC = -xy$

Hyperb. typ när x, y är av olika tecken, ellipt. typ när x, y är av samma tecken. parab. typ om $x = 0$ eller $y = 0$

I området $x, y > 0$:
karact. ekvation

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-xy} = \pm i\sqrt{xy}$$

lösningar

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm i\, dx \sqrt{x}$$

$$2y^{1/2} = \pm i \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

nya variabler $\xi = \varphi(x,y) = 2y^{1/2}$
$\eta = \psi(x,y) = \frac{2}{3} x^{3/2}$

Transformeras till

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

I området $x > 0,\ y < 0$, karakt. ekvation

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-xy}$, $2\left((-y)^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}\right) = C$

Nya variabler $\xi = (-y)^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$
$\eta = y$

3. Poissonformel:

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \varphi(y)\,dy$$

Vi har

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) =$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\left(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right) dy$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\,dy$$

$$\leq \max_y |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy$$

$$= \max_y |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| .$$

4. Fouriertransformation definieras för distributioner i Schwartzrum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle \stackrel{def}{=} \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle, \text{ alla } \varphi \in \mathcal{S}$$

där $f \in \mathcal{S}'$ och $\mathcal{F}$ är Fouriertransf i $\mathcal{S}$.

$\mathcal{F}\delta$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, e^{-i0\cdot x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \varphi \cdot 1\,dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\delta = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}$$

$$\langle \mathcal{F}\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', \mathcal{F}\varphi\rangle = -(\mathcal{F}\varphi)'(0)$$

$$= \frac{d}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\, e^{-i\xi x}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(x)\,(-ix)\,dx, \quad \mathcal{F}(\delta') = -ix$$

$$\langle \mathcal{F}x^2, \varphi\rangle = \langle x^2, \mathcal{F}\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\iint x^2 e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} e^{-ix\xi}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,dx \stackrel{part}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint e^{-ix\xi}\,\varphi''(\xi)\,d\xi\,dx = \frac{1}{2\pi}\varphi''(0)$$

$$\mathcal{F}x^2 = \frac{1}{2\pi}\delta''$$