Hjälpmedel: INGA
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Magnus Önnheim 0703-088304
2011–12–15 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Formulera maksimumprincipen för paraboliska ekvationer. Bevisa att randvärdeproblemet $u_t - u_{xx} + e^x u = tx$ för $0 < x < 1$, $t > 0$ med randvillkoren $u(0,t) = -1,\ u(1,t) = 1$ och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2x - 1$ inte kan ha två olika lösningar. Gör det med två metoder: med hjälp av maksimulmrincipen och med hjälp av multiplikation och integrering. Försök göra detsamma för ekvationen $u_t - u_{xx} + e^x u^3 = tx$ (8p)

2. a. Formulera och bevisa den maksimumprincipen för Laplaceekvationen (medelvärdesatsen betraktas som känd.)
   b.Funktionen $u(x,y)$ satisfierar ekvationen $\Delta u = 1$ i rektangeln $0 < x < 2, 0 < y < 4$ och $u(x,y) = 0$ på randen av rektangeln. Genom att välja en funktion $v(x,y)$ sådan att $\Delta v = -1$ och använda maksimumprincipen till $u+v$, hitta övre och nedre uppskattningar för värden $u(1,1)$, u(1,2).Försök med olika hjälpfunktioner v för att få goda uppskattningar. (9p)

3. Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmäna lösningen till **ohomogena** ekvationen $u_{tt} - u_{xx} = \sin x$. Hitta lösningen med Cauchydata $u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0$. Hitta lösningen med Cauchydata $u(x,x) = 0,\ u(x,-x) = \cos x$. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan och av Fouriertransformation för distributioner. Beräkna Fouriertransformationen, första och andra derivator för distributionen F_f som genereras av den vanliga funktionen $f(x) = 0$, för $x < 0$ eller $x > \pi$;$f(x) = \cos(x),\ 0 \le x \le \pi$ (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om generaliserade lösningar och finitelemetmetoden för paraboliska ekvationer. Beskriv stabilitetsproblem. (8p)

6. a) Berätta så mycket som du kan om randelementmetoden för att lösa integralekvationer.
   b) Granska integralekvationen $u(x) = \sin x + \lambda \int_0^\pi u(y)\sin(x+2y)dy$. För vilka λ är ekvationen lösbar? Hitta lösningen för sådana λ (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 22. dec. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 20.dec. Ev. granskning 22.dec, 11-13, i mitt kontor.

GR

TMA 690, 2011-12-15 lösningar

1 a) Med. max. principen: Om det finns 2 lösningar, u_1, u_2, så tar vi $u = u_1 - u_2$,

(*) $u_t - u_{xx} + e^x u = 0$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$

Villkoret för koefficienten b uppfylls, så har u sitt största positivt värdet och minsta negat. värdet $0 \Rightarrow u = 0$

b. multip. (*) med u och integrera i x

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(x,t)\,dx = -\int_0^1 u_x^2\,dx - \int e^x u\,dx \leq 0$$

Detta betyder att $\int_0^1 u^2(x,t)\,dx$ inte växer $\Rightarrow = 0$.

c. $u_t - u_{xx} + e^x u(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) = 0$

$$-b = e^x(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) \geq 0$$

därför maxprinc. används

d. $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\,dx = -\int_0^1 u_x^2\,dx - \int_0^1 e^x u^4\,dx \leq 0.$$

2. Vi väljer en enkel funktion $v(x,y)$, $\Delta v = -1$.
Vi kan ta $v(x,y)$ som en polynom
$v(x,y) = ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey$, $\underline{a+c = -\frac{1}{2}}$
för $w(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$, har vi

$$\min_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) \le w(1,1) \le \max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) \qquad (*)$$

En komplett lösning skulle vara om man hittar min och max i $(*)$ och optimerar i koefficienterna a, b, c, d, e. Jag visar ett enkelt fall:

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + ey \quad , e$$

$$\max_{(x,y)\in D} v(x,y) \begin{cases} = 0 + 4e & , \text{om } e \ge 0 \\ = 0, & \text{om } e \le 0 \end{cases}$$

Därför $w(1,1) \le 0 + 4e$, $e \ge 0$

om $e \ge 0$: $u(1,1) = w(1,1) - v(1,1) \le 4e - (-\frac{1}{2}1^2 + e)$
$= 3e + \frac{1}{2}$; minimerar: $u(1,1) \le \frac{1}{2}$

om $e \le 0$ $\quad w(1,1) \le w(1,1) - v(1,1) \le 0 - (-\frac{1}{2}1^2 + e) = \frac{1}{2} - e$

minimerar: $u(1,1) \le \frac{1}{2}$.

Med ett annat val av v kan uppskattningar förbättras.

3. Föst hittar vi någon lösning till ohomogena ekvationen ; ett enkelt val bliv $u_p(x,t) = \sin x$.
Efter detta, har allmäna lösningen, enligt D'A.

$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) + \sin x$ med godtyckliga f och g.

funktionerna f och g hittas ur Cauchyvillkor.

T. ex. för det karakteristiska Cauchyproblemet

$u(x,x) = f(2x) + \sin x + g(0)$

$f(2x) = -\sin x - g(0)$,

$f(x) = -\sin\frac{x}{2} - g(0)$ (1)

$u(x,-x) = f(0) + g(2x) + \sin x = \cos x$

$g(2x) = -f(0) - \sin x + \cos x$

$g(x) = -f(0) - \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ (2)

$f(0)$ och $g(0)$ hittas genom att sätta $x=0$ i (1) och (2)

vi kommer till systemet

$$\begin{cases} f(0) = -\sin 0 - g(0) \\ g(0) = -\sin 0 - f(0) + \cos 0 \end{cases}$$

Systemet är inte lösbart.

Interpretara : 1: f eller g är inte kontinuerl. i punkten $x=0$, så man får inte sätta $x=0$ i (1) och (2) utan måste betrakta gränsvärden.

2. Det var fel på uppgiften och man ska ändra, t. ex. till $u(x,-x) = \cos x - 1$.

4. Derivatan

för $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$F_f'(\varphi) \overset{def}{=} -F_f(\varphi') =$$

$$-\int_0^\pi \varphi'(x) \cos x \, dx \overset{P.I}{=}$$

$$= -\int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx + \varphi(0) - \varphi(\pi)$$

$$\Rightarrow \quad F_f' = F_{\sin x, (0,\pi)} + \delta(0) - \delta(\pi)$$

$$F_f''(\varphi) = -F_f'(\varphi') =$$

$$\int_0^1 \varphi'(x) \sin x dx - \varphi'(0) + \varphi'(\pi)$$

$$= -\int_0^1 \cos x \, \varphi(x) dx - \varphi'(0) + \varphi'(\pi)$$

$$F_f'' \quad F_{-\cos x, (0,\pi)} + \delta'(0) - \delta'(\pi)$$

<u>Fourier.</u> $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$

$$= \int_0^\pi \cos x \, \hat{\varphi}(x) dx = \int_0^\pi \cos x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(\xi) d\xi \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^\pi \cos x \, e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^\pi \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-i\xi x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(1-\xi)x}}{i(1-\xi)} - \frac{e^{i(-1-\xi)x}}{-i(1+\xi)} \right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}} d\xi.$$

Det understrykta uttrycket ger svaret.

6. $u(x) = \sin x + \lambda \int_0^\pi u(y) \sin(x+2y)\, dy$

$= \sin x + \lambda \int_0^\pi \sin x \; u(y) \cos 2y \; dy + \lambda \int_0^\pi \cos x \; u(y) \sin 2y \, dy$

Vi får att $u(x) = A \sin x + B \cos x$.
Sätter in i ekvationen.

$A \sin x + B \cos x$

$$= \sin x + \lambda \sin x \int_0^\pi (A \sin y + B \cos y) \cos 2y \, dy$$

$$+ \lambda \cos x \int_0^\pi (A \sin y + B \cos y) \sin 2y \, dy$$

Jämför koefficienterna vid $\sin x$ och $\cos x$:

$\sin x$:

$$A = 1 + \lambda \left(A \int_0^\pi \sin y \cos 2x \, dx + B \int_0^\pi \cos y \cos 2y \, dy \right)$$

$$0 = \lambda A \int_0^\pi \sin y \sin 2y \, dy + \lambda B \int_0^\pi \cos y \sin 2y \, dy$$

Systemet är lösbart för alla λ utom de 2 för vilka det homogena systemet har $\det = 0$. för dessa 2 speciella λ gäller Fregholm 3.