Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK Telefon: David Witt-Nyström, 0703-088304

Chalmers tekniska högskola 2010–08–20 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 p.

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Låt D vara ett begränsat område in $\mathbb{R}^d$ med en glatt rand Γ. Bevisa att det inte finns någon glatt reell lösning till randvärdeproblem $\Delta u + |x|^2 + 1 = 0$ med randvillkoren $\partial u/\partial \nu = u^2$. Använd en av Greenformler. Hitta randvillkoren för vilka lösningen kan finnas. (6p)

2. Berätta om klassificering av adraordningens PDE med 2 och flera oberoende variabler. Avgör vilken typ som ekvationen $\alpha^2 u_{tt} + u_{tx} - u_{xx} = 0$ tilhör beroende på den reella parametern α. För vilka α Cauchyproblemet för ekvationen med Cauchydata $u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$ har bara en lösning? Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmäna lösningen till **ohomogena** ekvationen $u_{tt} - u_{xx} = x^2$. (10p)

3. Formulera den svaga maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Förklara fysikaliska tolkningen. Med hjälp av den principen visa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u + u^3 = F(x,t)$ för $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ (D är ett begränsat område med randen ∂D), $t \in (0,T)$, $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u(x,t) = g(x,t)$ för $x \in \partial D$, inte kan ha fler än en lösning. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution och av Fouriertransformation av distributioner. Hitta derivator och andraderivator av distributioner: $\sin^2 x\delta'$, $|x|^{1/2}$. Hitta Fouriertransformation av distributioner x^2 , $|x|$ (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (10p)

6. Berätta om randelementmetoder för att lösa randvärdeproblem för Laplaceekvationer. (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 8. sept. Ev. granskning måndagen, den 13.sept. kl. 11.00-13.00 i mitt kontor. G.Rozenblioum

GR

TMA 690 PDE F3

2010-08-20 Lösningar

---

1. Använder Green I med u som lösningen och $v=1$. Vi får

$$\int_D \Delta u \cdot v = \int_D \Delta u = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_\Gamma u^2 = \int_D -(|x|^2+1)$$

– omöjligt, därför finns lösningen inte.

Om man tar randvillkoren som satisfierar Green I, så finns lösningen. t. ex.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{|\Gamma|}\int_D (|x|^2+1)$$

---

2. $A = \alpha^2$, $B = 1$, $C = -1$

$B^2 - AC = 1+\alpha^2 > 0$ alltid;

Hyperbolisk typ.

Cauchyproblemet $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ om $\alpha \neq 0$ så hittar man bara en lösning med D'Alembert. Om $\alpha = 0$, så har vi

$$u_{tx} = u_{xx} \quad ; \quad \text{för } t=0,$$

har vi $u_{tx} = \psi_x(x) = u_{xx} = \varphi_{xx}(x)$

Så, lösningen finns endast

om $\psi_x = \varphi_{xx}$. Annars finns inte

Del 2: Sök $u = v - \frac{x^2}{2}$. Då satisfierar v ekvationen $v_t - v_{xx} = 0$. Använd D'Alembert

$u(t,0) = \varphi$

3. Antar att det finns 2 olika lösningar u_1 och u_2

Skriver ekvationen för u_1, u_2 och subtraherar; vi får för $u = u_1 - u_2$:

$$u_t - \Delta u + u(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \; ; \; u(x,t) = 0 \; ; \; x \in \partial D.$$

Koefficienten $u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2$ är alltid ickenegativ, därför $u = u_1 - u_2$ inte kan ha positiva max eller negativa min i $x \in D$ eller $t = T$. Därför ~~ ~~ måste

$u = 0$.

4, för $F = |x|^{1/2}$:

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1/2} \varphi'(x)\,dx$$

$$= +\frac{1}{2} \int |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x \; \varphi(x)\,dx$$

$$(|x|^{1/2})' = +\frac{1}{2} |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x$$

$$\langle F'', \varphi \rangle = \langle F, \varphi'' \rangle \underset{\text{part. int}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1/2} \varphi''(x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2} \int |x|^{-1/2} \operatorname{sgn} x \; \varphi'(x)\,dx.$$

Man kan inte partiellintegrera en gång till, eftersom kommer till en divergent integral.

Därför delar

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{-1/2}\operatorname{sgn}x\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right)|x|^{-1/2}\operatorname{sgn}x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}x\,\varphi'(x)\,dx = I_1 + I_2$$

För första integralen partiellintegrerar,

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{-1}|x|^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\varphi(-1)$$

$$-\frac{1}{4}\int_{1}^{\infty}|x|^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\varphi(-1)$$

För I_2, för att göra integralerna konvergenta, skriver $\varphi'(x) = (\varphi(x)-\varphi(0))'$ och partiellintegrerar

$$I_2 = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|x|^{-\frac{3}{2}}(\varphi(x)-\varphi(0)) - \frac{1}{2}(\varphi(1)-\varphi(0))$$

$$-\frac{1}{2}(\varphi(-1)-\varphi(0)).$$

Addera I_1 och I_2 - får uttrycket för derivatan.

Fourier transformation av x^2:

$\langle \hat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \hat{\varphi} \rangle$

$\langle \hat{x}^2, \varphi(\xi) \rangle = \langle x^2, \hat{\varphi}(x) \rangle$

(egenskaper av Fourier)

$= \int x^2 \hat{\varphi}(x)\, dx =$

$= -\varphi''(0) \cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\hat{x}^2 = -\delta'' \cdot 2\pi}$$