Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Grigori Rozenblioum 0739-751269
2010–04–09 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. a. Formulera Liouvillesatsen om harmoniska funktioner.
   b. Funktionen $u(x,y)$ är harmonisk i hela planet och satisfierar olikheten
   $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \leq x - 2y.$$
   Hitta alla sådana funktioner u. 8p

2. a. Formulera och bevisa den maksimumprincipen för Laplaceekvationen (medelvärdesatsen betraktas som känd.)
   b.Funktionen $u(x,y)$ satisfierar ekvationen $\Delta u = -1$ i kvadraten $|x|, |y| < 1$ och $u(x,y) = 1$ på randen av kvadraten. Genom att välja en funktion $v(x,y)$ sådan att $\Delta v = 1$ och använda maksimumprincipen till $u+v$, hitta övre och nedre uppskattningar för värden av $u(0,0)$.Försök med olika hjälpfunktioner v fř att få goda uppskattningar. (9p)

3. Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmäna lösningen till **ohomogena** ekvationen $u_{tt} - u_{xx} = ax + bt$. Bestäm typ, transformera till kanoniska formen och hitta lösningen till ekvationen $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = x$ med Cauchydata $u(x,0) = 5x$, $u_y(x,0) = 2$ (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution och av Fouriertransformation av distributioner. Hitta derivator och andraderivator av distributioner: $x\delta'$, $|x|^{1/3}$. Hitta Fouriertransformation av $x\delta' + x^2$ i distributionsmening. Bevisa att för distributioner $\Phi(x,y)$ av 2 variabler gäller $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Phi = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Phi$ (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till hyperboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. Diskutera stabilitetsfrågan (8p)

6. a) Beskriv randvärdeelementmetoden för Laplaceekvationer, inkl. relevanta Fredholmsatser (Potentialteori betraktas som känt).
   b) Hitta lösningen till integralekvationen $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(y) e^{x-2y} dy$. För vilka λ är ekvationen lösbar? (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 15. april. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 12.april Ev. granskning 19.april, 11-13, i mitt kontor.

GR

PDE, TMA690

Tenta 2010-04-09. Lösningar

1. $u(x,y)$ harmonisk $\Rightarrow$ $u_x(x,y)$ harmonisk;
$x-2y$ är också harmonisk,
så $u_x - (x-2y) \le 0$ är harmonisk, och
efter Liouville, $u_x - (x-2y) = c$ - konstant.

$$\int (u_x - (x-2y))\,dx = cx + f(y)$$

$$u(x,y) - \frac{x^2}{2} - 2xy = cx + f(y)$$

Funktionen $f(y)$ anpassas så att
$u = \frac{x^2}{2} + 2xy + cx + f(y)$ är harmonisk

$\Delta u = 1 + f''(y)$; $f''(y) = -1$; $f(y) = -\frac{y^2}{2} + ay + b$
a, b, c godtyckliga.

2. Väljer v : $\Delta v = 1$, då

$u + v = w$ är harmonisk;

$$u(0,0) = w(0,0) - v(0,0).$$

Maxprincip för w:

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) - v(0,0) \le u(0,0) \le \max_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) - v(0,0)$$

$$w = u + v, \quad u = 1 \text{ på } \Gamma,$$

$$1 + \min_{(x,y)\in\Gamma} v(x,y) - v(0,0) \le u(0,0) \le 1 + \max_{(x,y)\in\Gamma} v(x,y) - v(0,0)$$

Man kan försöka med olika funktioner v, t.ex.

$v(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy$; $A + B = 2$

och maximisera, minimisera på A, B, C.

3. a) variabelbytet av D'Alembert

$\xi = x+t$, $\eta = x-t$ } ekvationen transformeras till

$$4u_{\xi\eta} = \frac{a}{2}(\xi+\eta) + \frac{b}{2}(\xi-\eta)$$

integrerar på ξ, η, kommer till allmäna lösningen

$$u = f(x+t) + g(x-t) + \frac{1}{8}(a+b)\frac{\xi^2\eta}{2} + \frac{1}{8}(a-b)\frac{\eta^2\xi}{2}$$

b) transformerar till kanoniska formen, hittar allmäna lösningen som i a), bestämmer f, g m.h.av Cauchydata

4. $\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle$ – derivata

$\langle \mathcal{F} F, \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}\varphi \rangle$ – Fourier

Exempel på beräkningar

$$\langle (x\delta')', \varphi \rangle = -\langle x\delta', \varphi' \rangle =$$

$$-\langle \delta', x\varphi' \rangle =$$

$$\langle \delta, (x\varphi')' \rangle = (x\varphi')'(0)$$

$$= \varphi'(0) + 0\,\varphi''(0) = \langle \delta', \varphi \rangle$$

$$(x\delta')' = \delta'$$

$$\langle \mathcal{F}(x\delta' + x^2), \varphi(\xi) \rangle =$$

$$\langle x\delta' + x^2, (\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle = \langle \delta', x(\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle + \langle x^2, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$= -\left(x(\mathcal{F}\varphi)(x)\right)'(0) + \int x^2 (\mathcal{F}\varphi)(x)\,dx$$

$$= (\mathcal{F}\varphi)(0) + \int e^{i0\cdot x} x^2 (\mathcal{F}\varphi)(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle - \int e^{i0x} (\mathcal{F}\varphi'')(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle - 2\pi\, \varphi''(0)$$

$$\mathcal{F}(x\delta' + x^2) = 1 - 2\pi\,\delta''$$

6. $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(y) e^{x-2y} dy$

$= 1 + \lambda e^x \int_0^1 u(y) e^{-2y} dy$

Därför har $u(x)$ formen

$u(x) = A + Be^x$

med okända A, B. Sätter in i ekvationen

$A + Be^x = 1 + \lambda \int_0^1 (A + Be^y) e^{x-2y} dy$

$= 1 + \lambda A e^x \int_0^1 e^{-2y} dy + \lambda B e^x \int_0^1 e^{-y} dy$

Jämför koefficienterna före e^x och 1

$A = 1$; $B = \frac{\lambda A}{2}(1 - e^{-2}) + \lambda B (1 - e^{-1})$

Systemet är lösbart om

$\lambda(1 - e^{-1}) \neq 1$.