Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: David Heintz, 0762721860
2009–04–17 kl. 08.30–12.30

TMA690 PDE F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Hitta variabelbyte som transformerar ekvationen $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$ till kanoniska formen. Kolla att termer med derivator av ordningen 1 och termer utan derivator försvinner. Med hjälp av D'Alembert-metoden hitta allmäna lösningen. (8p)

2. Ge definitionen av derivatan av en distribution, av Fouriertransformation av en distribution. Definera fundamentallösning till en differentialekvation med konstanta koefficienter. Hur löser man ohomogena DE med hjälp av fundamentallösningen? Kolla att $\Phi(x) = \Theta(x)e^{-\lambda x}$ är en fundamentallösning till ekvationen $u' + \lambda u = f$; att $\Phi(x) = \Theta(x)\frac{\sin ax}{a}$ är en fundamentallösning till ekvationen $u'' + a^2 u = f$. $\Theta(x)$ är Heavisidefunktionen, $\Theta(x) = 0, x < 0; \Theta(x) = 1, x \geq 0$. (9p)

3. Definiera Greenfunktion av Dirichletproblem för Laplaceoperatoren. Hur löser man randväredeproblem med hjälp av Greenfunktioner. I halvrymden $\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d, x_1 > 0\}$, $d > 2$, bevisa att Greenfunktionen har formen $G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(x-y')$ där $\Phi(x) = \frac{1}{(d-2)\omega_d}|x|^{2-d}$ är fundamentallösningen till Laplaceekvationen och $y' = (-y_1, y_2, \ldots, y_d)$ är punkten symmetrisk till y med avsende på planet $y_1 = 0$. (8p)

4. Betrakta en icke-linjär värmeekvation

$$u_t = \Delta u - u^3, \ u|_\Gamma = 0, \ u(x,0) = \phi(x).$$

i $(0,\infty)\times D$, där $D \subset \mathbb{R}^d$ är ett begränsat område med glatt rand Γ. Bevisa att för varje glatt begynnelsefunktion $\phi(x)$ problemet har inte fler än 1 reel lösning. `Led: titta på ekvationen som satisfieras av skillnaden av två lösningar.` Bevisa att för reella lösningen $u(x,t)$

$$\int_D u(x,t)^2 dx \to 0, \ t \to \infty.$$

`Led: multiplicera ekvationen med` u `och integrera.` (10p)

5. I ett begränsat område $D \subset \mathbb{R}^d$ betrakta randvärdeproblemet $\Delta u = F$, $u|_\Gamma = g$. Granska frågan om entydighet av lösningen till problemet. Betrakta exempel: $u(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}$. Kolla att funktionen är harmonisk inne i cyrkeln $x^2 + y^2 - 2x = 0$ och har värde 0 på randet. Förklara paradox: exemplet bryter mot entydigheten. (7p)

6. Berätta så mycket som du kan om FEM för paraboliska randvärdeproblem, om stabilitetsproblemet och metoder för att förbättra stabilitet. (8p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 22. april. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 20. april. Visningen 24.apr 15-16, i mitt kontor.
G.Rozenblioum

GR

TMA690 - Partiella Differentialekvationer

2009-04-17

Lösningar.

1. Karakteristiska ekvationen:

$$dy^2 + 2\sin x\, dy\, dx - \cos^2 x\, dx^2 = 0$$

allmäna lösningar

$$y = \cos x \pm x = c$$

Variabelbytet:

$$\xi = y - \cos x - x$$
$$\eta = y - \cos x + x$$

Efter variabelbytet kommer till:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Allmäna lösningen:

$$u = f(y - \cos x - x) + g(y - \cos x + x).$$

2. Fundamentala lösningen till ekvationen $Lu = 0$ är funktion:

$$L\Phi(x) = \delta(x)$$

Se: Folland, s. 350

Ekvationen $Lu = f$ lösas genom $u = f * \Phi$.

$u' + \lambda u = 0$: $\Phi = \theta(x) e^{-\lambda x}$

$$\Phi' = \theta' e^{-\lambda x} - \lambda \theta(x) e^{-\lambda x}$$

$$= \delta - \lambda \theta(x) e^{-\lambda x}$$

$$\Phi' + \lambda \Phi = \delta - \lambda \theta(x) e^{-\lambda x} + \lambda \theta(x) e^{-\lambda x}$$

$u'' + a^2 u = 0$: $\Phi = \theta(x) \frac{\sin ax}{a}$

$$\Phi' = \theta' \frac{\sin ax}{a} + \theta \cos ax$$

$$= \theta \cos ax$$

$$\Phi'' = \theta' \cos ax - a\theta \sin ax$$

$$= \delta - a\theta \sin ax$$

$$\Phi'' + a^2 \Phi = \delta.$$

3: Berättades på föreläsningar.

4. antar att det finns 2 reella lösningar u_1, u_2.

$u = u_1 - u_2$ satisfierar

$$u_t = \Delta u - (u_1^3 - u_2^3)$$

$$\Rightarrow u_t = \Delta u - u(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)$$

$p = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2$ är alltid positivt.

multipl med u och integrera

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2(x,t)\,dx = -\int_D |\nabla u|^2 dx - \underbrace{\int p u^2 dx}_{<0}$$

$$\int_D u^2(x,0)\,dx = 0 \Rightarrow u = 0.$$

$$u_t = \Delta u - u^3.$$

multipl. med u och integrerar

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2(x,t)\,dx = -\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D u^4(x,t)\,dx$$

$$< -\int_D u^4(x,t)\,dt.$$

Med Cauchy-Schwartz:

$$\int_D u^2(x,t)\,dx = \int_D u^2(x,t) \cdot 1\,dx$$

$$\leq \left(\int_D u^4(x,t)\,dt\right)^{1/2} |D|^{1/2}$$

$$\Rightarrow -\int u^4 \leq \left(\int u^2\right)^2 |D|^{-1}$$

Betecunar

$$h(t) = \int_D u^2(x,t)\,dt$$

$$\frac{1}{2} h'(t) \leq -|D|^{-1} h^2(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{h'(t)}{h^2(t)} < -|D|^{-1}$$

$$\frac{h'(t)}{h^2(t)} = -\left(\frac{1}{h(t)}\right)'$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{h(t)}\right)' < -2|D|^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{h(t)}\right)' > 2|D|^{-1}$$

$$h(t)^{-1} = \int_0^t \left(\frac{1}{h(s)}\right)' ds > 2t|D|^{-1}$$

$$h(t) < (2t|D|^{-1})^{-1} \to 0.$$

5. Entydighetssatsen:

$u \in C^2(\bar{D})$

$\Delta u = 0$, $u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u = 0$

Bevis: multiplicera med u och Green 1

$\int |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = C$

$C = 0$ ur randvillkor.

paradox:

Den givna funktionen $u(x,y)$ satisfierar Laplace i D, randvillkoren, men är inte kontinuerlig i punkten $(x,y) = (0,0)$