Hjälpmedel: INGA
MATEMATIK Telefon: Martin Berglund, 0762721860, besöker salar 09.30, 11.00
Chalmers tekniska högskola 2008–12–18 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Formulera Liouvillesatsen för harmoniska funktioner. Beskriv alla positiva harmoniska funktioner $u(x, y)$. Bestäm alla harmoniska funktioner för vilka $u(x, y) \leq x$? Försök härleda versionen av Liouvillesatsen för lösningar till ekvationen $u_{xx} + u_{yy} + 2u_y + u = 0$ (1) genom att transformera den ekvationen till Laplace med hjälp av transformationen $u = e^{ax+by}v$ med passande a, b. Avgör om det finns positiva icke-konstanta lösningar till ekvationen (1). Vilka lösningar satisfierar $u(x, y) \leq x$? (9p)

2. Härled D'Alemberts formel för allmäna lösningen till ekvationen $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$. Hitta lösningen som satisfierar bivillkoren $u(x, t) = x^2$ för $x = 2t$, $u(x, t) = 2x$ för $x = t + 1$. Bestäm det storsta området där lösningen definieras om det andra bivillkoret är angivet inte på hela räta linjen utan bara på dennes intervall $1 \leq t \leq 4$. (8p)

3. Formulera maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Avgör om det kan finnas en lösning till värmeekvationen $u_t - u_{xx} = 0$ i området $0 < x < 1,\ 0 < t < 1$ som är kontinuerlig i hela kvadraten $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1$ och har värden $u(x, 0) = 2\sin(\pi x),\ u(x, 1) = 5\sin(\pi x),\ u(0, t) = \sin(\pi t),\ u(1, t) = 2\sin(\pi t)$? Densamma fråga för ekvationerna $u_t - u_{xx} \pm \frac{1}{4}u = 0$. (7p)

4. Ge definitionen till derivatan av distibutioner (med motivering). Bevisa att för en distribution $F \in \mathcal{D}'$ och en funktion $f \in C^\infty$,

$$(fF)' = f'F + fF'.$$

   Beräkna derivator av de följande distributioner i $\mathbb{R}^2$:

   a) $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, där F är δ - distributionen koncentrerade på x-axel, $F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, 0)dx$.

   b) $\frac{\partial F}{\partial x}$ där $F(\phi)) = \int_{0<x<1, 0<y<1} \phi(x, y)dxdy$.

   Berkna faltningen av distributioner $F(\phi) = \int_0^1 \phi(x, 0)dx$ och $G(\phi) = \int_0^1 \phi(0, y)dy$. (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till hyperboliska randvärdeproblem och FEM för problemet. Beskriv hur man löser FEM ekvationer. Vad är stabilitetsproblem? (9p)

6. Berätta så mycket som du kan om potentialteori för Laplaceekvationen och randelementmetoden för att lösa integralekvationer i potentialteori. (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 2. januari 2009. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 30. dec. Det första granskningstillfället den 2. januari, kl 15-17, det andra den 19. januari kl 15-17 i Grigoris kontor. Då kan man hämta sina arbeten.

G.Rozenblioum

TMA 690 ; 2008-12-18

Lösningar.

1. Liouville's sats. En funktion som är harmonisk i hela rummet och övre eller nedre begränsad måste vara en konstant.

(Det vanligaste felet: harmonisk i D)

$v(x,y) = u(x,y) - x \leq 0$

v är harmonisk, $v = C \leq 0$

$u = x + C \quad , \quad C \leq 0.$

$u_{xx} + u_{yy} + 2u_y + u = 0$

transformerar till Laplace

$u = e^{ax+by} v \quad \Rightarrow \quad a = 0, \; b = -1$

$v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0$

$e^{-y} v(x,y) - x \leq 0$

$v(x,y) \leq x e^{y}$

Liouville fungerar inte eftersom

$\Delta(x e^{y}) \neq 0$ och $x e^{y}$ inte är begränsad uppåt eller nedåt.

Man kan säga ingenting !

2. $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

Allmänna lösningen:

$u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t)$

Använder bivillkor:

$u(2t,t) = f(0) + g(4t) = x^2 = 4t^2$

$u(t+1,t) = f(-t+1) + g(3t+1) = 2x$
$= 2t+2$

$g(t) = \frac{t^2}{4} - f(0)$

$f(-t+1) = 2t+2 - \frac{9t^2+6t+1}{4} + f(0)$

$f(t) = f(0) - \frac{9}{4}t^2 - 8t + 6$

$u(x,t) = 2x^2 + 10xt - 8t^2 - 8x + 16t$

Om bivillkor är givna endast för $t \in (1,4)$

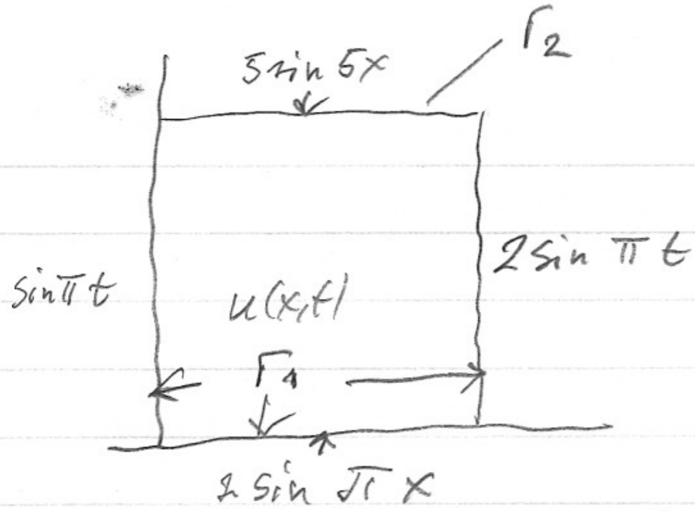
då: $g(t) = \frac{t^2}{4} - f(0)$ alla t

$f(-t+1)$ är angiven endast för
$t \in (1,4)$

$f(t)$: $-3 < t < 0$

$u(x,t)$ är definierad för $-3 < x-2t < 0$

3.



Enligt max-principen, kan lösningen endast ha sitt maxvärdet på Γ_1. Men värdet på Γ_2 är större $\Rightarrow$ sådan lösning kan inte finnas

För ekvationen $u_t = u_{xx} - \frac{u}{4}$

densamma principen gäller.

För $u_t = u_{xx} + \frac{u}{4}$ går inte,

eftersom $b = \frac{1}{4} > 0$ Men vi kan sätta

$$v(x,t) = u(x,t)\, e^{-\frac{t}{4}}$$

Då satisfierar $v(x,t)$ ekvationen

$$v_t = v_{xx}$$

och förtfarande v har sitt största värdet pa Γ_2 : $5 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}}$.

Det värdet är större an

$$\max_{t \in (0,\pi)} 2 \sin t\, e^{-\frac{t}{4}}$$

Vilket hittas med hjälp av derivatan

4. $F = \delta(y)$:

1. $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,0)\,dx$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,0)\,dx = \varphi(-\infty,0) - \varphi(\infty,0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,0)\,dx$$

2. $F(\varphi) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x,y)\,dy$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi) = F\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$= -\int_0^1 \left(\varphi(1,y) - \varphi(0,y)\right) dy$$

3. Faltning: möjligt eftersom båda har kompakt stöd

$$(F*G)(\varphi) = F(\tilde{G}*\varphi) =$$

$$(\tilde{G}*\varphi)(t) = \tilde{G}(\tilde{\varphi}*t) = \int_0^1 \left(\iint \varphi(-x-\xi, -y-\eta)\, t(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right) \Big|_{0,-y} dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 \varphi(-\xi, y-\eta)\,dy \right) t(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$= f(t)$, där $f(\xi,\eta) = \int_0^1 \varphi(-\xi, y-\eta)\,dy$

$$= \Rightarrow (F*G)(\varphi) = F(f) = \int_0^1 f(x,0)\,dx = \int_0^1\int_0^1 \varphi(-x,y)\,dx\,dy$$