Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK Telefon: Marcus Warfheimer, 0762721860, besöker salar 14.30, 17.00

Chalmers tekniska högskola 2008–08–28 kl. 14.00–18.00

TMA690 PDE F3, 4,5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Avgör om det finns en positiv glatt lösning till randvärde problem $\Delta u - u^3 = 1$ i D, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ på randen av D. Finns det några reella lösningar av ekvationen $\Delta u - u^3 - 4u = 0$ med detta randvillkor? Hitta alla, om de finns. Försök beskriva någon stor mängd funktioner $f(u), g(x)$ sådana, att ekvationen $\Delta u - f(u) = g(x)$ bara har ett ändligt antal positiva lösnigar med randvillor $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. (10p)

2. Härleda och diskutera d'Alembertformel. Hitta lösningen till vågekvationen $u_{xx} - u_{tt} = 0$ med data $u(x, 2x) = x^2$, $u(x, -2x) = x^3$ (6p)

3. Formulera den svaga maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Förklara fysikaliska tolkningen. Med hjälp av den principen visa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u + \sum_{k=1}^{d} \sin(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} = F(t, x)$ för $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ (D är ett begränsat område), $t \in (0, T)$, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u(x, t) = g(x, t)$ för $x \in \partial D$ kan ha inte fler än en lösning. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution. Avgör vilka distributioner är lösningar av differentialekvation $x^3 f''(x) = 0, x \in \mathbb{R}^1$? a) $f(x) = \theta(x)$, b) $f(x) = \delta'(x)$, c) $f(x) = x\delta''(x)$, d) $f(x) = |x|\delta(x)$. (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (11p)

6. Berätta så mycket du kan om finitdifferensmetoden för att lösa PDE.(7p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den. 10 sept. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 01.sept. Ev. granskning onsdagen, 10.sept, 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

GR

TMA 690 ; PDE

Tenta 080828 . Lösningar.

1. $\Delta u = u^3 + 1$. Integrera över D.

Kommer till $\int_D \Delta u \, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = 0$

$= \int (u^3+1)\, dx$. Eftersom $u \geq 0$, $u^3 \geq 0$

Det sista är omöjligt. Inga lösningar.

$\Delta u = u^3 + 4u$. Multiplicera med u

och integrera :

$$\int_D u \Delta u \, dx = -\int |\nabla u|^2 dx = \int u^4 + 4u^2 \, dx$$

I den sista ekvationen, v.l. är ≤ 0,

H.L ≥ 0 därför $u = 0$.

Allmänt : $\Delta u = f(u) + g(x)$. Integrerar.

$$\int f(u)\, dx + \int g(x)\, dx = 0 .$$

Om $\int g = 0$, $\int f(u) = 0$. Antar att

$f(u) \geq 0$ och det finns bara ett ~~ä~~ändligt

antal punkter u_j : $f(u_j) = 0$.

Då bara konstanta funktioner $u = u_j$

kan vara lösningar.

2. D'A formeln ger

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$$

Vi söker f och g ur randvillkor. för $t = 2x$:

$$f(x+2x) + g(x-2x) = x^2 ;$$

~~fä~~ $$f(3x) + g(-x) = x^2 \qquad (1)$$

för $t = -2x$:

$$f(x-2x) + g(x+2x) = x^3$$

$$f(-x) + g(3x) = x^3$$

$$f(x) + g(-3x) = -x^3 \qquad (2)$$

~~Sät~~ Ersätter x med $3x$ i (2) :

$$f(3x) + g(-9x) = -27x^3 \qquad (3)$$

Löser (1) och (3) :

$$g(-x) + g(-9x) = -27x^3 + x^2$$

$$g(x) + g(9x) = 27x^3 + x^2 \qquad (4)$$

Söker lösninger till (4) på formen

$$g(x) = Ax^3 + Bx^2$$

Sätter i (4) hittar $A, B,$

Efter detta hittar f ur (2).

4. Se lösningen till problemet 4 i