Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK Telefon: Fredrik Lindberg, 0762721860, besöker salar 14.30, 17.00
Chalmers tekniska högskola 2008–03–27 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 p. (3 gamla p.)

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Berätta om klassificering av adraordningens PDE med 2 oberoende variabler. Bestäm vilken typ tillhör ekvationen $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$ beroende på x, y. Transformera till kanoniska formen i området: (a) $x > 0, y > 0$; (b) $x > 0, y < 0$. (7p)

2. Formulera medelvärdesatsen för harmoniska funktioner. Härleda maksimumprincipen för harmoniska funktioner ur medelvärdesatsen. Vidare, för ekvationen $u_{xx}+u_{yy}-u^5 = 0$ bevisa att en reel lösning inte kan ha ett negativt minimum eller ett positivt maximum i en innre punkt i området. Vad kan man säga om maximumprincipen för ekvationen $u_{xx} + u_{yy} + u^5 = 0$? (10p)

3. Hitta lösningen till randvärdeproblem $u_{xx} - u_{tt} = 0$, $u(x, x) = x$, $x \in (0, 5)$; $u(x, -x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$ i så stort område som du kan. Demonstrera att utanför det område lösningen inte kan hittas ur de angivna randvillkoren.

   (7p)

4. Formulera maximumprincipen för en linjär parabolisk ekvation. Använd den principen för att härleda en liknande maximumprincip för den ickelinjära värmeekvationen $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$. (7p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till elliptiska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (10p)

6. Berätta så mycket du kan om potentialteori och relaterade lösningsmetoder för Laplaceekvationen. (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas ons. 3. apr. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 31.mars. G.Rozenblioum

GR

TMA690 Partiella differentialekv.

F3 ; 2008-03-27

Lösningar.

1. Ekvationen har hyperbolisk typ för $xy<0$, elliptisk typ för $xy>0$, parabolisk typ för $xy=0$, d.v.s. för $x=0$ eller $y=0$.

Transformation ~~fa~~ till kanoniska typen för $x>0$, $y<0$, när ekvationen är hyperbolisk, ger metoden substitutionen:

$$\xi = -2(-y)^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad \eta = -2(-y)^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Ekvationen tar formen:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}\left[(2\xi-\eta)u_\xi - (2\eta-\xi)u_\eta\right] = 0.$$

För $x>0$, $y>0$, när ekv. har ellipt. typ, substitutionen

$$\xi = 2y^{1/2}, \quad \eta = \frac{2}{3}x^{3/2};$$

ekv. tar formen:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_\xi + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0.$$

2. antar att i punkten inne i området

(x_0, y_0)

har funktionen $u(x,y)$ som satisfierar $u_{xx} + u_{yy} - u^5 = 0$

~~ett~~ negativt minimum. Då måste

$u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0$

och $u_{xx}(x_0, y_0)$, $u_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$

(som man vet ur flervariabelkursen).

också $u^5(x_0,y_0) = u^4(x_0, y_0)\, u(x_0, y_0) < 0$

eftersom $u^4(x_0, y_0) > 0$.

Samlar: $\underset{\geq 0}{u_{xx}} + \underset{\geq 0}{u_{yy}}(x_0, y_0) \underbrace{- u^5(x_0, y)}_{> 0}$.

> 0 – kan inte satisfiera ekv.

På liknande sätt, om vi betraktar tecken för derivatan och u, lösningen

$u_{xx} + u_{yy} + u^5 = 0$

kan inte ha ett positivt min

3. Allmäna lösningen till ekvationen

$u_{xx} - u_{tt} = 0$

har formen

$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t).$

Vi försöker hitta f och g ur randvillkoren.

sätter $x=t$

$u(x,x) = f(2x) + g(0) = x,$

$x \in (0,5).$

$u(x,-x) = f(0) + g(2x) = x^2$

$x \in (0,\infty)$

Vi sätter, f. ex. $g(0) = 0$, eftersom transformationen $f \mapsto f+c,\ g \to g-c$ leder till densamma lösningen.

$f(2x) = x, \quad x \in (0,5) \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (0, 10).\ , f(0) = 0$

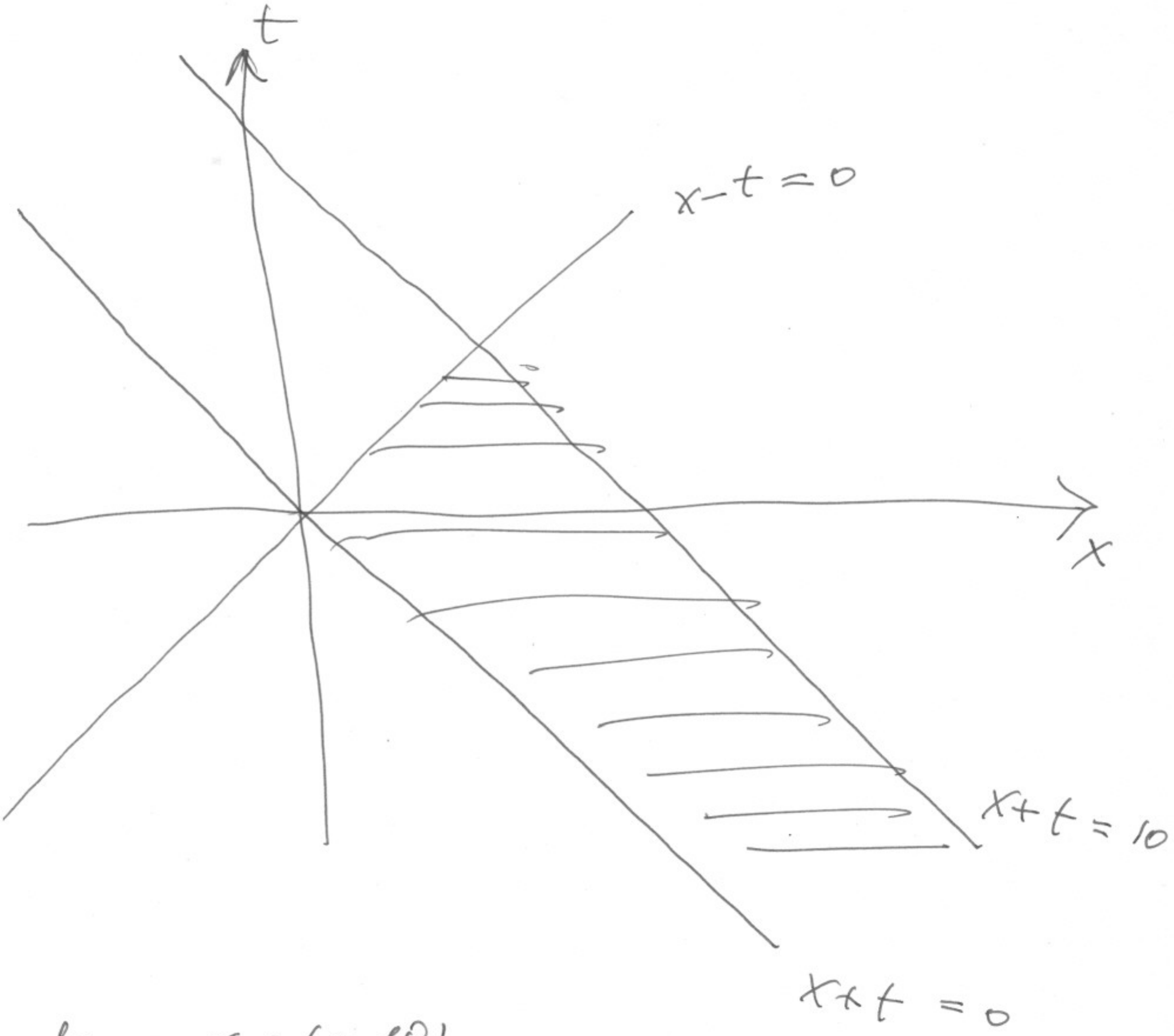
$g(2x) = x^2, \quad x \in (0,\infty)$

$g(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in (0,\infty).$

Så, har lösningen formen

$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) = \frac{x+t}{2} + \frac{(x-t)^2}{2}$

i området $x+t \in (0,10),\ x-t \in (0,\infty)$



utanför $x \in (0,10)$
definieras $f(x)$ inte av
randvillkoren, så kan vi ta varje
värde som helst – det leder till
olika lösningar i
detsamma gäller för $g(x)$ utanför $x>0$

4.

maxprincipen för paraboliska ekvationen säger att

lösningen till

$$u_t - u_{xx} - b(x,t)\, u = 0$$

kan ha sitt posit. max. värde i det märkta området endast på den feta linjen, om $b < 0$.

Antar att $u(x,t)$ är lösningen till $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$

betecknar $b(x,t) = -u(x,t)^2$.

Då har vi $b(x,t) \leq 0$ och u är lösningen till

$$u_t - u_{xx} - b(x,t)\, u = 0$$

$\Rightarrow$ max. princip.