Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK Telefon: Mikael Persson , 0762721860, besöker salar 09.30, 12.00
Chalmers tekniska högskola 2007–12–22 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Ge definitionen av Greenfunktion $G(x, y)$ av Dirichletproblemet i D. Beskriv egenskaper av $G(x, y)$. Hur löser man Dirichletproblemet med hjälp av Greenfunktionen? Med hjälp av Greenfunktionen visa att för varje punkt $x^\circ \in D$ finns en konstant C (kanske, beroende på x°) sådan att $|\nabla u(x^\circ)| \leq C \max_{y\in\partial D} |u(y)|$ för varje funktion u harmonisk i D och kontinuerlig i $\bar{D}$. ∂D betecknar randen. (9p)

2. För vågekvationen $u_{tt} - \Delta u = 0$ i trediminsionella rummet, $x \in \mathbb{R}^3$, söker vi lösningar u vilka endast beror på $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ och t (radiala vågor). Visa att funktionen $u(r, t) = \frac{f(r-t)}{r} + \frac{g(r+t)}{r}$ där f, g är godtyckliga funktioner av en variabel, ger en radialvåg. (För radiala funktioner gäller $\Delta u = u_{rr} + 2r^{-1}u_r$). Hitta lösningen av Cauchyproblemet för ekvationen med data $u(r, 0) = \varphi(r),\ u_t(r, 0) = 0$. För $\varphi(r)$ med kompakt stöd, beskriv på kvalitativ nivå hur sådana radiala vågor sprider sig, samt beskriv Huygens princip. Fortsätt $\varphi(r)$ som 0 för negativa r. (9p)

3. Formulera maximumpricipen för värmeekvationen. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område med glatt rand. Bevisa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u - p(x, t)u = F(x, t); u(x, 0) = \phi(x), u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega$ inte kan ha 2 olika lösningar, antigen med maximumprincipen eller med hjälp av multiplicering och integrering. Välj själv vilkoren på funktionen $p(x, t)$ under vilka du kan bevisa detta (max poäng ges för en godtycklig begränsad funktion $p(x, t)$.) (10p)

4. Ange motivering för definitionen av derivatan av en distribution och för multiplikation av en distribution med en glatt funktion. Beräkna de följande derivator av distributioner $\frac{d^2}{dx^2}|x|,\ \frac{d}{dx}(\cos(x)\delta(x)),\ \frac{d^2}{dx^2}(x\delta''(x))$. Hitta derivatan av distributionen $F(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)x^{-1/2}dx$. (7p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och FEM för dem. (8p)

6. Berätta om olika typer av PDE och om metoder för att transformera PDE med 2 oberoende variabler till kanonisk form. (7p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 4.jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 29.dec. Ev. granskning, den 16.jan., 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

GR

TMA 690 Partiella differentialekv.

Tenta 2007-12-22

lösningar.

1. Om egenskaper av Greenfunktioner se DC, s. 166.

$$u(x) = -\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} \, dS(y) \quad (1)$$

Funktionen $G(x,y)$ är en harmonisk funktion för $x \neq y$, därför glatt. Man kan för x inne i D termvis derivera formeln (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = -\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x_k \partial \nu(y)} \, dS(y).$$

Derivatan $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x_k \partial \nu(y)}$ är begränsad, $\leq C$,

därför $\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right| \leq C \int_{\partial D} |u(y)| \, dS(y)$.

2. Att $u(r,t) = \frac{f(r-t)}{r} + \frac{g(r+t)}{r}$

är lösningen får man med direkt substitution.

Att lösa Cauchyproblemet:

Sätter in $u(r,t)$ i Cauchyvillkoren

$$\left.\begin{aligned} u(r,0) &= \frac{f(r)}{r} + \frac{g(r)}{r} = \varphi(r) \\ u_t'(r,0) &= -\frac{f'(r)}{r} + \frac{g'(r)}{r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ur ekvationer (2) hittar f, g.

$$f(r) = g(r) = \frac{r\varphi(r)}{2}$$

lösningen har formen:

$$u(r,t) = \frac{\varphi(r-t)(r-t)}{2r} + \frac{\varphi(r+t)(r+t)}{2r}$$

analys av lösningen.

φ delas i 2 radiala vågor. en av dem $\frac{\varphi(r+t)(r+t)}{2r}$ går mot centrum,

den andra vågen går från centrum.

Om $\varphi(r)$ är koncentrerad på intervall $a < r < b$, $\varphi = 0$ utanför interval

så ska vågen

$\frac{\varphi(r-t)(r-t)}{2r}$ koncentrerad i interv

$a+t < r < b+t$. $r = a+t$ - framfront

$r = a-t$ - bakfront. för stora r, $r \sim t$, Så kan vi se,

för utgående vågen har man Huygens princip. amplituden minskar som t

Ingående vågen $\frac{\varphi(r+t)(r+t)}{r}$ har framfront på $r = a-t$, bakfront för $r = b-t$, också Huygens' princip gäller.

---

3. beviset för en begränsad funktion $p(x,t)$, $|p(x,t)| < P_0$.
~~Sätt~~ Söker $u(x,t)$ som
$u(x,t) = v(x,t)\, e^{P_0 t}$. Sätter in i ekvationen. för $v(x,t)$ får vi ekvation

$$V_t - \Delta V + (P_0 - p(x,t))V = F(x,t)e^{-P_0 t}$$

med samma rand- och begynnelsevil[lkor] som för $u(x,t)$.

Med hjälp av maximumprincipen:
Antar att v_1, v_2 - 2 lösningar. betrakta $v = v_1 - v_2$. Funktionen v satisfierar ~~sätt~~ ekvationen

$$V_t - \Delta v + (P_0 - p(x,t))v = 0 \qquad (3)$$
$$v(x,0) = 0; \quad v\big|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

Eftersom $P_0 - p(x,t) > 0$, gäller maximum[principen]
- v kan inte ha ~~sa~~ sin positiv max eller negativ min inne i området, bara för $x \in \partial\Omega$ eller $t = 0$.

därför $0 \le v(x,t) \le 0$, $v \equiv 0$.

Med integregiag. Multiplicera ekv. (3) med $v(x,t)$ och integrera i Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega (P_0 - p(x,t))v^2 dx$$

den andra och den tredje integral[illegible]
är icke - negativa, därför

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega v(x,t)^2\,dx \leq 0 \text{ ,}$$

$\int_\Omega v(x,t)^2\,dx$ minskar, men för t[illegible]

har vi $\int_\Omega v(x,0)^2\,dx = 0$.

$\Rightarrow \int_\Omega v(x,t)^2\,dx = 0$ för alla t.

---

4. Beräkningar.

$|x|'$: $|x|'(\varphi)$

$$= -|x|(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\,dx$$

$=$ (partiellintegrering)

$$-\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \Theta(\varphi$$

$|x|' = \Theta$

$|x|'' = \Theta' = \delta$.

Enligt definitionen

$$\frac{d}{dx}\left(\cos x\,\delta(x)\right)(\varphi)$$

$$= -\left(\cos x\,\delta(x)\right)(\varphi')$$

$$= -\,\delta(x)\left[\cos x\,\varphi'(x)\right] = -\cos 0\,\varphi'$$

$$= -\varphi'(0)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\,\delta''(x)\right)(\varphi)$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(x\,\delta''(x)\right)(\varphi') =$$

$$= x\,\delta''(x)\,(\varphi'') = \delta''(x\varphi'')$$

$$= -\delta'\left((x\varphi'')'\right) = \delta\left((x\varphi'')''\right)$$

$$= (x\varphi'')''\Big|_{x=0}$$

$$= (x\varphi'''' + 2\varphi''')\Big|_{x=0} = 2\varphi'''(0).$$

$$F(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^{-1/2}\,dx$$

$$F'(\varphi) = -F(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\int_0^1 \varphi'(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int_1^\infty \varphi'(x)\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(0))'\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \frac{2}{3}\int_1^\infty \varphi(x)\,x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \varphi(1)$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(0))\,x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \frac{2}{3}\int_1^\infty \varphi(x)\,x^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$+ \varphi(0)\cdot\frac{2}{3} + \varphi(1) - \varphi(1).$$