Hjälpmedel: INGA
MATEMATIK Telefon: Karin Kraft, 0762721860, besöker salar 14.30, 17.00
Chalmers tekniska högskola 2007–04–12 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 3 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Ge definitionen av Greenfunktion $G(x, y)$ av Dirichletproblemet i D. Beskriv egenskaper av $G(x, y)$. Hur löser man Dirichletproblemet med hjälp av Greenfunktionen? Med hjälp av maximumprincipen bevisa att $G(x, y) > 0$ för $x, y \in D$. Om $D' \subset D$, strängt inne i D, är ett område med glatt rand och $G'(x, y)$ är Greenfunktionen av Dirichletproblemet i D', visa att $G'(x, y) < G(x, y)$ för $x, y \in D', x \neq y$. (11p)

2. Lös randvärdeproblemet $u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0, x > 0$ med bivillkor $u|_{x=0,t>0} = t$, $u|_{t=0,x\geq 0} = 0$, $u_t|_{t=0,x\geq 0} = \cos(x)$. (7p)

3. Ge definitionen till ekvationen av elliptiska typ. Bestäm för vilka reella α är ekvationen

$$L(u) \equiv -u_{xy} - 2\alpha u_{xx} + 3\alpha^2 u_{yy} - \alpha u_y + u_x = 0 \tag{1}$$

elliptisk. För sådana α transformera ekvationen (1) till kanoniska formen. (Först transformera ekvationen till formen $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + pu_\xi + qu_\eta = 0$ och efter detta ta $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{a\xi+b\eta}$ och anpassa a, b så att första derivator försvinner) Med hjälp av kanoniska formen hitta formeln för lösningen till paraboliska ekvationen $u_t(x, y, t) - L(u(x, y, t)) = 0, t \geq 0$ med Cauchydata $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ (10p)

4. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^3$ med glatta randen. Antag att $u(x, t) \in C^2(D \times [0, T])$ är en reel lösningen till vågekvationen $u_{tt} = \Delta u$ i $D \times [0, T]$ som uppfyller randvillkoren $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D\times[0,T]} = 0$, där ν betecknar utåtriktade normal till randen ∂D. Visa att

$$\int_D (u_t(x, 0)^2 + |\nabla_x u(x, 0)|^2)dx = \int_D (u_t(x, T)^2 + |\nabla_x u(x, T)|^2)dx$$

och ge en fysikalisk tolkning. Hur ändras resultatet för den ohomogena vågekvationen $u_{tt} = \Delta u + F(t, x)$? (7p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och FEM för dem. (9p)

6. Berätta så mycket som du kan om Duhamelformler och deras tillämpningar (6p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 20. apr. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 16.apr. Ev. granskning tisdaged, den 23.apr., 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

TMA 690. Partiella Differentialekvationer F3. Tenta 2007-04-12

<u>Lösningar.</u>

1. Greenfunktionen $G(x,y)$ för Dirichletproblem $\Delta u = 0$, $u|_\Gamma = f$, $\Gamma = \partial D$.

Har formen $G(x,y) = G_0(x,y) + g(x,y)$

där $G_0(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|}$, $d=2$

och $G_0(x,y) = \frac{1}{\omega_d} |x-y|^{2-d}$, $d>2$,

och $g(x,y)$ är för fixerade y en harmonisk funktion av x variabel för $x \in D$ och $g(x,y) = -G_0(x,y)$, $x \in \partial D$.

Funktionen $G(x,y)$ är alltså harmonisk för $x \neq y$. När $x \to y$, så går $G(x,y)$ mot $+\infty$, därför att G_0 går mot $+\infty$ och g är begränsad.

Låt δ vara sådan att $G(x,y) > 0$ för $|x-y| < \delta$. Vi betraktar området ~~$D_\delta = D$ med~~ cirk $D_\delta = D \setminus B(y,\delta)$, d.v.s. området D med en liten cirkel (ball) med radie δ och centrum i y borttagen.

Funktionen G är harmonisk i D_δ, positiv på randen av $B(y,\delta)$ och lika med 0, d.v.s. icke-negativ på randen av D. Nu, enligt maximumprincipen, har G sitt

minsta värdet i D_δ på randen av ~~inne i~~ D_δ,
det minsta värdet är alltså
icke-negativt, därför är G
positivt inne i D_δ. G är också
positivt i bollen B_δ. Därför är
G positivt överallt inne i D.
Om D_1 är ett annat område
som ligger inne i D och $G_1 = G_0 + g_1$
är Greenfunktionen i D_1,
så betraktar vi skillnaden
$$F = G - G_1 \quad i \ D_1$$
Vi har $F = G - G_1 = (G_0 + g) - (G_0 + g_1)$
$= g - g_1$. Både funktioner g, g_1
är harmoniska i D_1, därför är
F harmonisk i D_1. På randen av D_1
är G_1 lika med 0 och G är positivt
enligt del 1. Därför är F positivt
på randen. Enligt maximumprincipen
är F positivt överallt i D_1.

2. Vi löser randvärdeproblemet

$u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$ med bivillkor

$u|_{x=0,t>0} = t$; $u|_{t=0,\, x\geq 0} = 0$; $u_t|_{t=0,x\geq 0} = \cos x$.

Vi får inte använda d'Alembert formel för lösningen därför att vi har ett felt område: en kvart i stället av halvplan. Men d'Alembert metoden ger allmäna lösningen på formen

$$u(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x+t)$$

med några funktioner φ, ψ, alltså måste vi hitta funktioner φ, ψ ur randvillkoren.

~~För $x \geq 0, t \geq 0$~~

För $t=0$, $x \geq 0$ har vi

$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = 0$,

Därför $\psi(x) = -\varphi(x)$ för positiva x

[obs: Detta säger ingenting om φ, ψ för negativa x !!]

För $t=0$, $x \geq 0$, har vi

$u_t(x,0) = -\varphi'(x) + \psi'(x) = \cos x$

Eftersom $\psi(x) = -\varphi(x)$, så

$\psi'(x) = -\varphi'(x)$,

$-2\varphi'(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\cos x$

$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\sin x + C$

$\psi(x) = \frac{1}{2}\sin x - C$, $C = \varphi(0) = -\psi(0)$

Nu måste vi bestämma $\varphi(x)$, $\psi(x)$ för negativa x ur det sista bivillkoret för $x=0$.

Vi har för $x=0$, $t>0$

~~...~~ $u(0,t) = \varphi(-t) + \psi(t) = t$

Eftersom ~~...~~ $t>0$, är $\psi(t)$ definierat, $\psi(t) = \frac{1}{2}\sin t - c$

så har vi

$\varphi(-t) = t - \frac{1}{2}\sin t + c$ för positiva t. Ersätter $-t$ mot t:

$$\varphi(t) = -t + \frac{1}{2}\sin t + c, \quad t<0.$$

ψ för negativa ~~x~~ behöver ~~...~~ vi inte därför ~~...~~ att sådana värden inte ingår i formeln för lösningen.

Alltså har vi lösningen

$$u(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x-t)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t), & x+t \geq 0 \\ -(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t), & x-t < 0 \end{cases}$$

3. $L(u) = -u_{xy} - 2\alpha u_{xx} + 3\alpha^2 u_{yy} - \alpha u_y + u_x$.

$A = -2\alpha, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 3\alpha^2$

Ekvationen är elliptisk om $B^2 - AC < 0$,

$\frac{1}{4} + 6\alpha^3 < 0$; $\alpha < \sqrt{1/24}$

För sådana α transformerar vi ekvationa till kanoniska formen. I nya koordinater $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$ bestäms φ_1, φ_2 som reella och imaginära delar av lösningen $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ av ekvationen $A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0$

Löser kvadratekvationen:

$$A\varphi_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\varphi_y = 0$$

$$-2\alpha\varphi_x + \left(-\frac{1}{2} + i\beta\right)\varphi_y = 0 \qquad (1)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{4} - 6\alpha^3}$$

Löser ekv. (1) med karakteristikmetoden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2} + i\beta}{-2\alpha} = +\frac{1}{4\alpha} - \frac{i\beta}{2\alpha}$$

$$dy = \left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\beta}{-2\alpha}\right)dx$$

$$y - \frac{x}{4\alpha} + \frac{i\beta}{2\alpha}x = C$$

$$\varphi_1 = y - \frac{x}{4\alpha}, \quad \varphi_2 = \frac{\beta}{2\alpha}x$$

Så, nya variabler är $\xi = y - \frac{x}{4\alpha}$; $\eta = \frac{\beta}{2\alpha}x$

Transformerar ekvationen:

$$u_x = u_\xi \xi_{\cancel{x}} + u_\eta \eta_x = \frac{-1}{4\alpha} u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{1}{16\alpha^2} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{4\alpha^2} u_{\xi\eta} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = \frac{1}{4\alpha} u_{\xi\xi} + \frac{\beta}{2\alpha} u_{\xi\eta}$$

$$Lu = -u_{xy} + 3\alpha^2 u_{yy} - 2\alpha u_{xx} - \alpha u_y + u_x$$

$$= \frac{-1}{4\alpha} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{2\alpha} u_{\xi\eta} + 3\alpha^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha \{$$

$$\frac{1}{16\alpha^2} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{4\alpha^2} u_{\xi\eta} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} u_{\eta\eta} \}$$

$$-2\alpha u_\xi - \frac{1}{4\alpha} u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta$$

$$= \gamma (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - (2\alpha + \frac{1}{4\alpha}) u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta .$$

$$\gamma = -\frac{1}{4\alpha} + 3\alpha^2 > 0.$$

* Söker $u = e^{p\xi + q\eta} v$ så att termer med första derivator försvinner

$$u_\xi = p e^{p\xi+q\eta} v + e^{p\xi+q\eta} v_\xi$$

$$u_{\xi\xi} = p^2 e^{p\xi+q\eta} v + 2p e^{p\xi+q\eta} v_\xi + e^{p\xi+q\eta} v_{\xi\xi}$$

$$u_{\eta} = q e^{p\xi+q\eta} v + e^{p\xi+q\eta} v_\eta$$

$$u_{\eta\eta} = q^2 e^{p\xi+q\eta} v + 2q e^{p\xi+q\eta} v_\eta + e^{p\xi+q\eta} v_{\eta\eta}$$

då: $\gamma(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}) - (2\alpha+\frac{1}{4\alpha})u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha}u_\eta$

$= e^{p\xi+q\eta}\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})$

$+e^{p\xi+q\eta}\gamma[pv_\xi+qv_\eta] + e^{p\xi+q\eta}\gamma(p^2+q^2)v$

$-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})e^{p\xi+q\eta}(v_\xi+pv)$

$+\frac{\beta}{2\alpha}e^{p\xi+q\eta}(v_\eta+pv)$.

så, koefficient hos v_ξ är $\gamma p-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})$,
koeff. hos v_η är $\gamma q+\frac{\beta}{2\alpha}$
Vi väljer $p=\frac{1}{\gamma}(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})$, $q=-\frac{1}{\gamma}\frac{\beta}{2\alpha}$,
så försvinner termer med v_ξ, v_η
och $Lu = e^{p\xi+q\eta}\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})+e^{p\xi+q\eta}hv$
där h är ett tal, $h=\gamma(p^2+q^2)-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})+\frac{\beta}{2\alpha}$.

Nu löser vi ekvationen
$$u_t - Lu = 0 \; ; \; u|_{t=0}=u_0.$$
Söker lösningen på formen
$$u = e^{p\xi+q\eta}v(\xi,\eta,t):$$
Så transformeras ekvationen till
$$v_t-\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+hv)=0$$
$$v(\xi,\eta,0)=v_0=e^{-p\xi-q\eta}u_0$$

Ersätter $v(\xi,\eta,t) = e^{h\gamma t} w(\xi,\eta,t)$.

~~de~~ Så satisfierar w ekvationen

$$w_t - \gamma \Delta w = 0, \quad w(\xi,\eta,0) = v_0.$$

Det är värmeekvationen som lösas med Poissonformeln och efter ~~detta~~ går vi tillbaka till u.

4. Vi beräknar $\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\nabla_x u(x,t)\right]^2\right)$

$$= \cancel{2\langle\nabla_x u_t, \nabla u\rangle}\ 2\langle \nabla_x u_t, \nabla_x u\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2\right) = 2u_t u_{tt}.$$

Så $\frac{d}{dt}\int_D \left(\left[\nabla_x u(x,t)\right]^2 + u_t^2\right) dx$

$$= 2\int_D \langle \nabla_x u_t, \nabla_x u\rangle dx + 2\int_D u_t u_{tt}\, dx$$

$=$ (Greenformel)

$$-2\int_D u_t \cdot \Delta u\, dx + 2\int_D u_t u_{tt}\, dx$$

$$= -2\int_D u_t\,(\Delta u - u_{tt})\, dx = 0.$$

Därför är $\int_D \left[\nabla_x u(x,t)\right]^2 + u_t^2\, dx$

oberoende av t, och har samma värde för $t=0$ och $t=T$. Detta uttrycker lagen om energipreservation.

För ekvationen $u_{tt} - \Delta u = F(x,t)$
ger densamma beräkningen

$$\frac{d}{dt}\left(\int_D (u_t^2 + |Du|^2)\,dx \right) = 2 \int_D F(x,t)\, u_t \, dx$$

Ekvationen beskriver svängningar med externa kraften $F(x,t)$.

$$\frac{1}{2}\int_D \left(u_t^2(x,T) + |Du(x,T)|^2 \right) dx - \frac{1}{2}\int_D \left(u_t^2(x,0) + |Du(x,0)|^2 \right) dx = \int_0^T \int_D F(x,t)\, u_t \, dx\, dt$$

Den sista ekvation beskriver att ändringen av energi är lika med arbetet av externa kraften.