Hjälpmedel: INGA
MATEMATIK Telefon: Marcus Warfheimer, 0762721860, besöker salar 14.30, 17.00
Chalmers tekniska högskola 2006–12–16 kl. 14.00–18.00

TMA690 Fourieranalys F3, 3 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Avgör om det finns en positiv glatt lösning till randvärde problem $\Delta u - u^3 = 1$ i D, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ på randen av D. Finns det några reella lösningar av ekvationen $\Delta u - u^3 - 2u = 0$ med detta randvillkor? Hitta alla, om de finns. Med randvillkoret $u = 0$ på randen? (6p)

2. Härleda och diskutera d'Alembertformel. Berätta så mycket du kan om beroendeområdet för vågekvationen. Låt $u(x, t)$ vara en lösning till vågekvation $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}^1, t > 0$.

   a) Antar att vi vet att $u(x, t) = 0$ i rektangeln $|x| \leq 1; 0 \leq t << 2$. I vilka punkter till är lösningen definierad av sådana data.

   b) Antar att $u(x, t) = 0$ *utanför* denna rektangel. I vilka punkter till måste $u(x, t)$ vara lika med 0?? `led: försök med variabelbytet` $t \mapsto -t$

   (8p)

3. Formulera den svaga maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Förklara fysikaliska tolkningen. Med hjälp av den principen visa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u + \sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = F(t, x)$ för $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ (D är ett begränsat område), $t \in (0, T)$, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u(x, t) = g(x, t)$ för $x \in \partial D$ kan ha inte fler än en lösning. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution. Avgör vilka distributioner är lösningar av differentialekvation $x^3 f''(x) = 0, x \in \mathbb{R}^1$? a)$f(x) = \theta(x)$, b)$f(x) = \delta(x)$, c) $f(x) = \delta'(x)$, d) $f(x) = x\delta'(x)$, e) $f(x) = |x|\delta(x)$. (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till elliptiska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (13p)

6. Berätta så mycket du kan om finitdifferensmetoden för att lösa PDE.(7p)

Skrivningen beräknas färdigrättas ons. 3. jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 18.dec. Ev. granskning torsdagen, 18.jan, 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

GR

TMA690 2006-12-16

Partiella differentialekvationer Lösningar

1. a. Integrerar ekvationen

$$\int_D \Delta u \, dx = \int_D (1+u^3)\, dx$$

Greenformel:

$$0 = \int \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dx = \int (1+u^3)\, dx > 0.$$

$\Rightarrow$ Det finns inte några lösningar.

b. $\Delta u = u^3 - 2u + 1$

Försöker med konstanter $u = C$, $\Delta u = 0$.

$C^3 - 2C + 1 = 0$; $C^3 - C - (C-1) = 0$

$(C^2 + C - 1)(C-1) = 0$,

$C_1 = 1$, $C_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — 3 lösningar

För Dirichletvillkoren konstanta lösningar finns inte.

Tyvärr var det tryckfel i del b: ekvationen borde vara

$$\Delta u - u^3 - 2u = 0.$$

Då multiplicerar vi ekvationen med u och integrerar:

$$-\int |\nabla u|^2 dx = \int (u^4 + 2u^2)\, dx$$

$\Rightarrow u = 0.$

Mitt fel ska kompenseras! Förlåt!!

2. Om vi transformerar ...

kanoniska formen med variabelbytet

$\xi = x+2t$, $\eta = x-2t$, so har vi

$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = 0$, Så

u_ξ är oberoende av η, u_η är oberoende av.

u_ξ är konstant längs linjerna $\xi = \text{konst}$,

u_η är konstant längs linjerna $\eta = \text{konst}$.

I variabler x, t, betyder detta att

$u_\xi = u_x + 2u_t$ är konstant längs linjerna

$x+2t = c$, $u_\eta = u_x - 2u_t$ är konstant

längs linjerna $x-2t = \text{konst}$.

a.

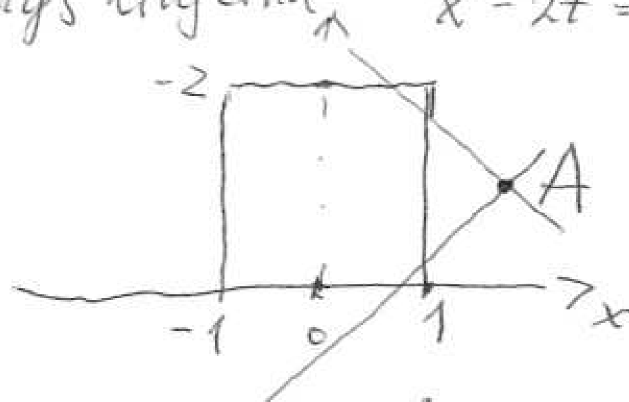
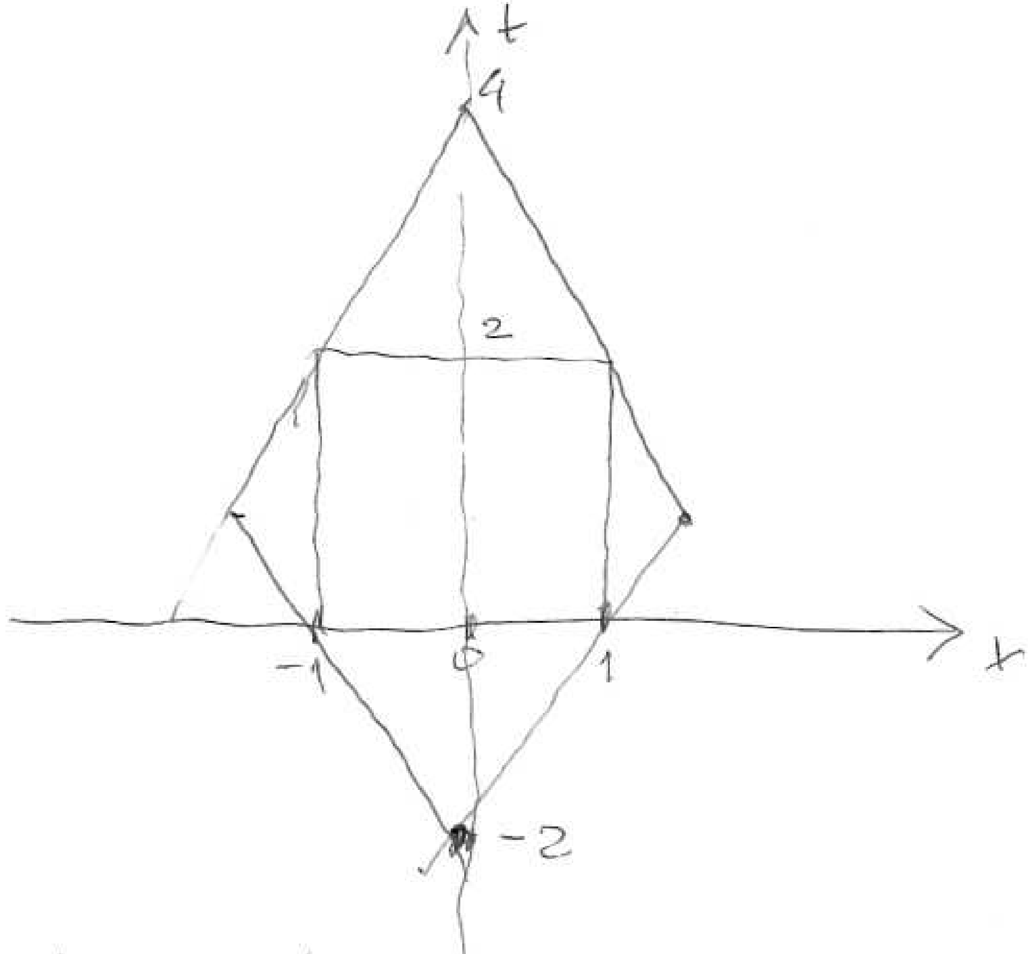


fig. 1

Ta någon punkt A som ligger utanför den givna rektangeln, antar att det finns linjerna $x-2t = c_1$, $x+2t = c_2$ sådana att de passerar genom A och skär rektangeln. Då blir både $u_x + 2u_t$ och $u_x - 2u_t$ = i A, eftersom dessa uttryck = 0 i rektangeln.

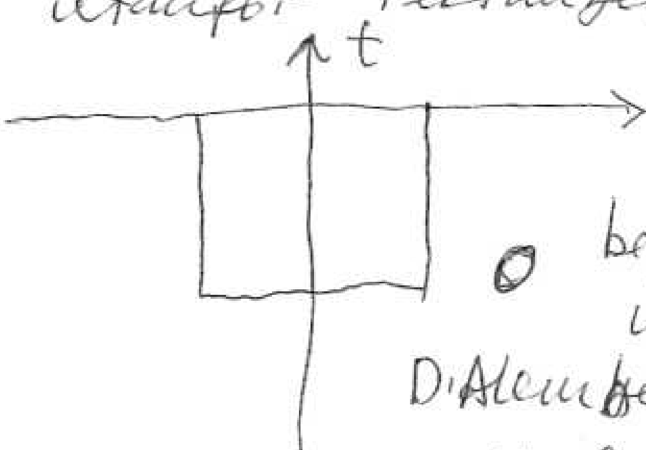
Så har vi $u_x = 0$ och $u_t = 0$ i A.

Sådana punkter A fyller en romb, se fig. 2



I den romben $u_x = u_t = 0$, u = konst.,
men $u = 0$ i rektangeln, därför $u = 0$
i hela romben

b. Gör variabelbyte $t \mapsto -t$. Då
kommer vi till samma vågekvationen $u_{xx} - 4u_{tt}$
i området $t \le 0$, och $u = 0$
utanför rektangeln $|x| \le 1$, $-2 \le t \le 0$



. Funktionen u löser
Cauchyproblemet med
begynnelsevillkoren
$u(x,-2) = 0$, $u_t(x,-2) = 0$
D'Alembertformeln ger att
$u = 0$ överallt.

Antar att det finns 2 olika lösningar, (4)
u_1 och u_2. Då skillnaden $u = u_1 - u_2$
satisfierar $u_t - \Delta u + \sum x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$
med begynnelsevillkoren $u(0,x) = 0$ och
randvillkoren $u(t,x) = 0$, $x \in \partial D$.
Ur maxprincipen följer att $u(t,x) \leq 0$
överallt i $(0,T) \times D$. Funktionen
$v = -u$ satisfierar densamma ekvation
med desamma randvillkoren. Så $v(t,x) \leq 0$,
$u(t,x) \geq 0 \Rightarrow u = 0$ överallt, $u_1 = u_2$.

4. Först, låt oss förstå vad som är
$x^3 f''$ för en distribution f: för $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle x^3 f'', \varphi \rangle = \langle f'', x^3\varphi \rangle = -\langle f', (x^3\varphi)' \rangle$$
$$= \langle f, (x^3\varphi)'' \rangle$$

Nu kollar vi:

a $\langle \theta, (x^3\varphi)'' \rangle = \int_0^\infty (x^3\varphi(x))'' dx$

$$= (x^3\varphi(x))' \Big|_0^\infty = 0, \text{ ~~eftersom bå~~}$$

b $\langle \delta, (x^3\varphi)'' \rangle = [x^3\varphi(x)]'' \big|_{x=0}$

$$= 6x\varphi(x) + 6x^2\varphi'(x) + x^3\varphi''(x) \Big|_{x=0} = 0$$

15

2. $\langle \delta', (x^3\varphi)'' \rangle = -\langle \delta, (x^3\varphi)''' \rangle$

$$= -(x^3\varphi)'''\Big|_{x=0} = -\Big[6\varphi(x) + 18x\varphi'(x) + 9x^2\varphi''(x) + x^3\varphi'''(x)\Big]\Big|_{x=0} = -6\varphi(x) = \langle -6\delta, \varphi \rangle \neq 0$$

På liknande sätt

1. $\langle x\delta', (x^3\varphi)'' \rangle = \langle \delta', x(x^3\varphi)'' \rangle$

$$= -\langle \delta, (x(x^3\varphi)'')' \rangle = 0$$

3: $|x|\,\delta(x)$ är ej tillåtet, eftersom man endast kan multiplicera en distribution med en glatt funktion.