TMA 690
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F
Datum: 2005-08-15, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (6p)$$

2. Lös begynnelse- och randvärdesproblemet

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ x > 0; \quad u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,$$

där $\mu \in C^2[0,\infty)$, $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$. Ge en fysikalisk tolkning för problemet och lösningen. (8p)

3. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ (du kan välja $n = 2$) och låt $C_T = \Omega \times (0,T]$. Antag att $u \in C^2(\overline{C}_T)$ är en lösning till $u_t - \Delta u = f$ i C_T, sådan att $u = 0$ på $\partial\Omega \times [0,T]$. Visa att

$$\int_\Omega u^2(x,s)\,dx \le \int_\Omega u^2(x,0)\,dx + 2\int_{C_s} |u|\,|f|\,dx\,dt. \qquad (8p)$$

4. En begränsad tredimensionell kropp Ω utsätts för en periodisk yttre påverkan $F(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}$. Kroppens vibrationer beskrivs av vågekvationen

$$\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2\Delta \cdot = F(x,t).$$

(a) Om $u = u(x)$ är amplituden för Ω:s vibrationer och frekvensen är densamma som i den yttre kraften, härled en differentialekvation för $u(x)$. (2p)

Förutsatt att du har räknat rätt, har du nu för $u(x)$ fått Helmholtz ekvation

$$\Delta u + k^2 u = -f \qquad \text{i } \Omega \qquad (k \text{ antas vara positiv}).$$

Uppgiften går ut på att visa en motsvarighet till medelvärdesegenskapen för lösningarna till Helmholtz homogena ekvation $\Delta u + k^2 u = 0$.

Antag att $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ är ett (öppet) område och låt $x_0 \in \Omega$ samt låt $u \in C^2(\Omega)$ vara en lösning till $\Delta u + k^2 u = 0$. Definiera

$$I(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x_0)} u \, dS.$$

(b) Visa att I satisfierar $r^2 I''(r) + 2rI'(r) + k^2 r^2 I(r) = 0$. (4p)

(c) Finn $I(r)$. (Tips: Gör substitutionen $Y = rI$; bestäm konstanterna givet definitionen för I.) (4p)

(d) Härled för lösningen u en motsvarighet till harmoniska funktioners medelvärdesegenskap. (2p)

5(a). Ange variationsformuleringen för Dirichlets problem med homogena randvillkor för Laplaces operator för ett område i $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$). (2p)

(b) Formulera och bevisa Poincarés (Friedrichs) olikhet. (4p)

(c) Visa att H^1- och H_0^1-normerna är ekvivalenta i $H_0^1(\Omega)$, där Ω är ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$). (4p)

6. Formulera och bevisa en a priori feluppskattning i H^1-norm för FEM-lösningen. (6p)

Partiella differentialekvationer F

TMA 690

Lösningar 15/8 - 2005

(1.) $B^2 - AC = (-x)^2 - x^2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ parabolisk

Lös $x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

ger $-\ln x = y + C$, eller, $xe^y = C$

Sätt $\begin{cases} \xi = xe^y \\ \eta = x \end{cases}$

$u_x = u_\xi e^y + u_\eta$; $u_y = u_\xi x e^y$

$u_{xx} = u_{\xi\xi} e^{2y} + 2u_{\xi\eta} e^y + u_{\eta\eta}$

$u_{xy} = u_{\xi\xi} x e^{2y} + u_\xi e^y + u_{\xi\eta} x e^y$

$u_{yy} = u_{\xi\xi} x^2 e^{2y} + u_\xi x e^y$

Ekvationen: $(x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta))$

$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} + u_y =$

$= \cancel{x^2 e^{2y} u_{\xi\xi}} + \cancel{2x^2 e^y u_{\xi\eta}} + x^2 u_{\eta\eta} -$

$- \cancel{2x^2 e^{2y} u_{\xi\xi}} - \cancel{2x^2 e^y u_{\xi\eta}} - \cancel{2xe^y u_\xi} +$

$+ \cancel{x^2 e^{2y} u_{\xi\xi}} + \cancel{xe^y u_\xi} + \cancel{xe^y u_\xi} = 0$

ger $u_{\eta\eta} = 0$ $\quad u_\eta = \varphi(\xi)$

$u = \varphi(\xi)\eta + \psi(\xi)$

$\Rightarrow u(x,y) = x\varphi(xe^y) + \psi(xe^y)$,

$\varphi, \psi \in C^2$,

för övrigt godtyckliga

2. PDE:ns allmänna lösning är

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at), \quad f, g \in C^2$$

$t=0,\ x>0$: $\quad f(x) + g(x) = 0$

$$af'(x) - ag'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = C$$

ger att:

$$f(x) = C, \quad g(x) = -C \quad \text{för } x>0$$

$x=0,\ t>0$: $\quad f(at) + g(-at) = \mu(t)$

$x + at > 0 \quad \forall\ x, t > 0$

$\Rightarrow f(x+at) = C$ i I kvadranten

(1) För $x - at \underset{(=)}{>} 0$ (d.v.s. $x \geq at$):

$$g(x-at) = -C$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{för } x - at \geq 0$$

(2) För $x - at < 0$:

$$at - x > 0$$

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) =$$

$$= C + g(x-at) =$$

$$= \underbrace{f(at-x)}_{=C} + g(x-at) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u = \begin{cases} 0 & \text{för } x \geq at \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{för } x < at \end{cases}$$

Problemet modellerar en sträng som vibrerar s.a. dess ena ändpunkt rör sig enligt en given lag (μ). Punkten x_0

på strängen är orörlig till tiden
$t_0 = x_0/a$, då den nås av vågen
(a är hastigheten).

---

3. $$\int_\Omega \underbrace{u_t u}_{=\frac{1}{2}(u^2)_t} dx - \int_\Omega \Delta u \cdot u \, dx = \int_\Omega u f \, dx$$

Greens formel $\Rightarrow$ $$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega u f \, dx$$

Integrera m. a. p. t från 0 till s:

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega u^2(x,s)dx - \int_\Omega u^2(x,0)dx\right) +$$

$$+ \underset{\geq 0}{\blacksquare} = \int_0^s \int_\Omega \underbrace{uf}_{\leq |u||f|} dx\, dt$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u^2(x,s)dx \leq \int_\Omega u^2(x,0)dx +$$

$$+ 2\int_{C_s} |u||f| dx dt$$

---

4. (a) $u(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x) e^{i\omega t}$$

$$\Delta_x u(x,t) = \Delta_x u(x) \cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 u(x)\cancel{e^{i\omega t}} - a^2 \Delta u(x) \cdot \cancel{e^{i\omega t}} = a^2 f(x) \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\Rightarrow \Delta u + k^2 u = -f,$$

där $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ (>0).

(b) $I(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x_0)} u\, dS = \left[x = x_0 + ry, \; |y| = 1 \right]$

$\overset{\circledast}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(0)} u(x_0 + ry)\, dS_y$ OK att derivera under integraltecknet

$\Rightarrow I'(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(0)} \nabla u \cdot \underbrace{y}_{\text{normalriktning}}\, dS_y =$

$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(0)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS_y = [\text{substituera tillbaka}]$

$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \underset{\text{Greens symmetriska formel med } v \equiv 1}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(x_0)} \Delta u\, dx =$

$= -\frac{k^2}{4\pi r^2} \underbrace{\iiint_{B_r(x_0)} u\, dx}_{\int_0^r \left(\iint_{S_\rho(x_0)} \right)} = -\frac{k^2}{r^2} \int_0^r \rho^2 I(\rho)\, d\rho$ enligt I:s definition

$\Rightarrow (r^2 I')' = -k^2 r^2 I$

$\Rightarrow r^{\cancel{2}} I''(r) + 2\cancel{r} I'(r) + k^2 r^{\cancel{2}} I(r) = 0$

(c) $(rI)' = rI' + I$

$(rI)'' = rI'' + 2I'$ $\qquad rI = Y$

$\Rightarrow Y'' + k^2 Y = 0$

$\Rightarrow Y(r) = A \cos kr + B \sin kr$

$\Rightarrow I(r) = \frac{A \cos kr + B \sin kr}{r}$

$\lim_{r \to 0} I(r) = u(x_0)$ (se $\circledast$)

$\Rightarrow A = 0, \; B = \frac{1}{k} u(x_0)$ (d) $u(x_0) = \frac{kr}{\sin kr} I(r)$