TMA 690
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Partiella differentialekvationer F
Datum: 2005-05-27, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Cromvik, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad \text{(6p)}$$

2. Finn alla lösningar till vågekvationen i tre rumsvariabler som i varje punkt endast är beroende av tiden och punktens avstånd till origo. (8p)

3. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$. Antag att $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ är en lösning till värmeledningsekvationen i $\Omega \times (0,T)$ som uppfyller $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0$ (ν betecknar den utåtriktade enhetsnormalen). Visa att

$$\int_\Omega u(x,t)\,dx = \int_\Omega u(x,0)\,dx \qquad \forall t \in [0,T]. \qquad \text{(8p)}$$

Kan du ge en fysikalisk tolkning?

4. Låt Ω vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$. En kontinuerlig funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ kallas subharmonisk i Ω om $v \leq u_B$ i B för alla bollar B sådana att $\overline{B} \subset \Omega$, där u_B är lösningen till $\Delta u_B = 0$ i B, $u_B|_{\partial B} = v|_{\partial B}$.

(a) Beskriv alla harmoniska och subharmoniska funktioner i $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$. (3p)

(b) Visa att om v är subharmonisk i Ω, $S(x_0,r) = \{x : |x-x_0| = r\}$ och $B(x_0,r) = \{x : |x-x_0| \leq r\} \subset \Omega$, så gäller

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\mu(S(x_0,r))} \int_{S(x_0,r)} v\,dS,$$

där $\mu(S(x_0,r))$ är måttet för sfären med radie r. (Du får anta att $\Omega \in \mathbb{R}^2$, om du anser att det gör problemet lättare; då gäller $\mu(S(x_0,r)) = 2\pi r$.) (3p)

(c) Visa att om en subharmonisk funktion $v \in C(\overline{\Omega})$ antar sitt största värde i en inre punkt i Ω, så är $v \equiv \text{const}$. (3p)

(d) Visa att om $v \in C^2(\Omega)$ och $\Delta v > 0$ i Ω, så är v subharmonisk i Ω. (3p)
(I själva verket är villkoret $\Delta v \geq 0$ i Ω nödvändigt och tillräckligt för att C^2-funktionen v ska vara subharmonisk.)

OBS! Harmoniska funktioner egenskaper får användas utan bevis.

5. Formulera och bevisa den svaga maximumprincipen för paraboliska PDE (en rumsvariabel). (8p)

6.(a) Ange variationsformuleringen för Dirichlets problem med homogena randvillkor för Laplaces operator för ett område i $\mathbb{R}^2$. (2p)

(b) Ange motsvarande variationsformulering för FEM. Förklara varför det problemet alltid är lösbart. (3p)

(c) Formulera en a priori feluppskattning för FEM-lösningen i max-norm (utan bevis). (3p)

Tips: Laplaces operator i sfäriska koordinater:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right);$$

$$(xf(x))'' = xf''(x) + 2f'(x).$$