Tentamen Partiella differentialekvationer, TMA690 F2 030524 V em

Provet består av fem uppgifter som kan ge max 10 poäng vardera, för godkänt krävs 25p.
Betygsgränser: **3**: 25-33, **4**: 34-42, **5**: 43-50.
Hjälpmedel: Beta.
Dina lösningar skall vara välskrivna och lätta att följa.
Telefonvakt: Johan Jansson 0740-459022.

1. Betrakta differentialekvationen:

$$\begin{cases} (a(x)u'(x))' = 0, & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ a(1)u'(1) = g_1. \end{cases} \tag{1}$$

Ange ett fysikaliskt problem som (1) anses modellera samt redogör för en härledning av differentialekvationen. Ange speciellt de fysikaliska storheter som $u(x)$ och $a(x)u'(x)$ representerar samt beskriv vad de bägge randvillkoren modellerar.

2. a) Formulera en finita element-metod för (1).
b) Bevisa *a posteriori* feluppskattningen

$$||(u-U)'||_a \leq C_i||hR(U)||_{1/a}, \tag{2}$$

där U är den styckvis linjära och kontinuerliga finita element-lösningen till (1).
c) Låt $a(x) = 1$ för $x < \frac{1}{2}$, $a(x) = 2$ för $x \geq \frac{1}{2}$ och $g_1 = -2$. Härled det matrisproblem $AU = b$ som uppstår vid diskretisering med FEM och styckvis linjära och kontinuerliga funktioner på en likformig indelning av intervallet $[0,1]$ i fyra delintervall. Beräkna explicit endast matriselementen a_{22} och a_{34} samt vektorelementet b_4.
d) Visa med hjälp av feluppskattningen (2) att finita element-lösningen som fås ur ovanstående problem faktiskt är exakt, d.v.s. att felet $u - U = 0$.

3 Betrakta det tidsberoende problemet

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + au(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

a) Betrakta först fallet $a = 40$. Skissera som funktioner av nk, $n = 0, 1, 2, ...$, de approximationer U_n av $u(nk)$ som erhålls då tidsstegning görs med *i*) explicit Euler, *ii*) implicit Euler samt *iii*) Crank-Nicolson med tidssteget $k = 0.1$.
b) Betrakta så fallet $a = i$, där $i^2 = -1$, med komplex lösning $u(t) = e^{-it}$ med egenskapen att $|u(t)| = 1$ för all tid. Visa att samma egenskap återfinns hos lösningar beräknade med Crank-Nicholson, d.v.s $|U_n| = 1$ för alla n, men inte för de beräknade med explicit eller implicit Euler.

Var god vänd!

4. a-c) Visa att för $u(x,t)$ som löser

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - u''(x,t) = 0, & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(0,t) = u'(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{4}$$

gäller att a) $||u(\cdot,t)||$ och b) $||u'(\cdot,t)||$ avtar med tiden t. Visa också att c) $||u'(\cdot,t)|| \to 0$ då $t \to \infty$.
d) Ge en fysikalisk tolkning av a)-c).

5. Bestäm lösningen till vågekvationen

$$\begin{cases} \ddot{u} - 4u'' = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x > 0, \\ \dot{u}(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Skissera också lösningen för de tre tiderna $t = 0.5, 1, 2$ då

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2,3], \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \tag{6}$$

Lösningar TMA690 F2 030524

1) T.ex. värmeledning med u som temperatur och $-au'$ som värmeflöde.

För härledning, se Computational Differential Equations kap 6.2.1

2) Def $V = \{ v : \int_0^1 (v')^2 + v^2\,dx < \infty,\ v(0) = 0 \}$

$V_h = \{ v \in V : v$ styckvis linj. & kont på en indelning av $I = [0,1] \}$

a) Multiplicera diff. eq. med en testfkt. v och integrera partiellt $\Rightarrow$

VAR: Sök $u \in V$ så att

$$\int_0^1 a u' v'\,dx = g_1 v(1) \quad \forall v \in V$$

Vi får då

FEM: Sök $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 a U' v'\,dx = g_1 v(1) \quad \forall v \in V_h$$

b) Def interpolanten $\pi v \in V_h$ till en funktion $v \in V$ så att

$$\pi v(x_j) = v(x_j) \quad \text{i alla noder } x_j.$$

Med $e = u - U$ fås

$$\|(u-U)'\|_a^2 = \int_0^1 a(u-U)'e'\,dx =$$

$$= \int_0^1 au'e'\,dx - \int_0^1 aU'e'\,dx = \{\text{VAE}\}$$

$$= g_1 e(1) - \int_0^1 aU'e'\,dx = \{\text{FEM}\}$$

$$= g_1 \underbrace{(e(1) - \pi e(1))}_{=0} - \int_0^1 aU'(e - \pi e)'\,dx$$

$$= -\sum_i \int_{I_i} aU'(e-\pi e)'\,dx = \{\text{Part. int.}\}$$

$$= \int_I \underbrace{(aU')'}_{R(U)}(e - \pi e)\,dx \leq$$

$$\leq \|hR(U)\|_{1/a} \|h^{-1}(e-\pi e)\|_a \leq$$

$$\leq C_i \|hR(U)\|_{1/a} \|(u-U)'\|_a$$

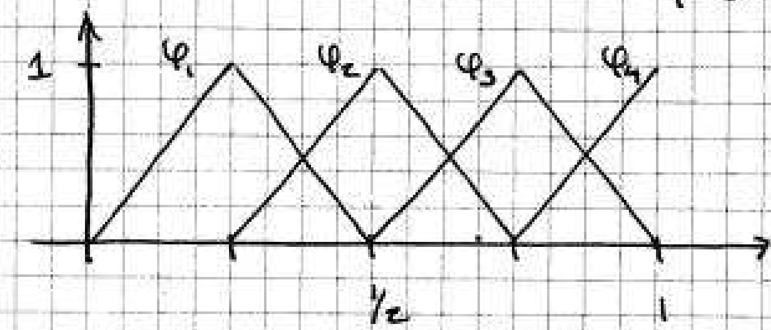
där I_i är delintervallen i indelningen av I.

c) En likformig indelning av $I = (0,1)$ i 4 delintervall ger

$$I_1 = (0, 1/4),\ I_2 = (1/4, 1/2),\ I_3 = (1/2, 3/4),\ I_4 = (3/4, 1)$$

En bas för V_h utgörs av $\{\varphi_j\}_{j=1}^{4}$

där $\varphi_j \in V_h$, $\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$



Ansätt $U(x) = \sum_{j=1}^{4} U_j \varphi_j(x)$

Med basen $\{\varphi_i\}_1^4$ kan FEM uttryckas

Sök $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 a U' \varphi_i' \, dx = g_1 \varphi_i(1) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Insättning av ansatsen ger

$$\sum_{j=1}^{4} U_j \int_0^1 a \varphi_j' \varphi_i' \, dx = g_1 \varphi_i(1) \qquad i = 1, \ldots, 4$$

Vi får då ett matrisproblem $AU = b$

med elementen i A som

$$a_{ij} = \int_0^1 a \varphi_j' \varphi_i' \, dx$$

och i b som

$$b_i = g_1 \varphi_i(1)$$

Med $a(x)$ och g_1 som i uppgiften

fås (med $h = 1/4$)

$$a_{22} = \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \, dx + \int_{1/2}^{3/4} 2 \cdot \left(\frac{-1}{h}\right)\left(\frac{-1}{h}\right) dx = 12$$

$$a_{34} = \int_{3/4}^{1} 2 \, \frac{1}{h} \left(\frac{-1}{h}\right) dx = -8$$

$$b_4 = (-2) \cdot 1 = -2$$

d) Eftersom $a(x)$ styckvis konstant & $U \in V_h$

fås att $R(U) = a'U' + aU'' = 0$

$\Rightarrow \; \|e'\|_a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e(x) = C$

Då e är kontinuerlig och $e(0) = 0$

$\Rightarrow \quad e(x) = 0$

3 a) Med $a = 40$ och $k = 0.1$ fås för

Explicit Euler:

$$\begin{cases} v_n - v_{n-1} + 40 \cdot 0.1\, v_{n-1} = 0 & n = 1, 2, 3, \ldots \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

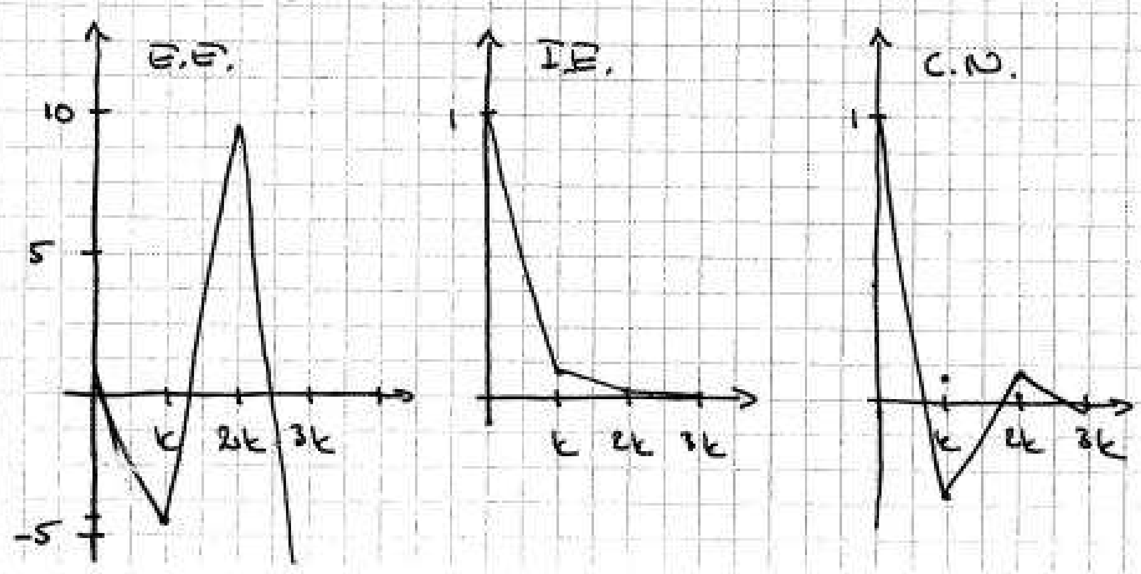
$$\Rightarrow \begin{cases} v_n = -3\, v_{n-1} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Implicit Euler:

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{1}{1 + 40 \cdot 0.1}\, v_{n-1} = \dfrac{1}{5}\, v_{n-1} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Crank-Nicolson:

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2} 40 \cdot 0.1}{1 + \frac{1}{2} 40 \cdot 0.4}\, v_{n-1} = -\dfrac{1}{3}\, v_{n-1} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$



b) Med $a = i$ får

Explicit Euler

$$|\sigma_n| = |1 - 0.1i|\,|\sigma_{n-1}| = \sqrt{1+0.01}\,|\sigma_{n-1}|$$

$$\Rightarrow \quad |\sigma_n| \geq |\sigma_{n-1}|$$

Implicit Euler

$$|\sigma_n| = \left|\frac{1}{1+0.1i}\right|\,|\sigma_{n-1}| = \frac{1}{\sqrt{1+0.01}}\,|\sigma_{n-1}| \leq |\sigma_{n-1}|$$

Crank-Nicolson

$$|\sigma_n| = \left|\frac{1-\frac{1}{2}0.1i}{1+\frac{1}{2}0.1i}\right|\,|\sigma_{n-1}| = |\sigma_{n-1}|$$

4a) Multiplicera ekvationen med u och integrera:

$$0 = \int_0^1 \dot{u}\, u\, dx - \int_0^1 u'' u\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 - \left[u'u\right]_0^1 + \|u'\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 = -\|u'\|^2 \leq 0$$

(Med likhet endast då $u_0 = 0$)

$\Rightarrow$ u avtar.

b) Multiplicera istället med u''

$$0 = \int_0^1 \dot{u}\, u''\, dx - \int_0^1 (u'')^2\, dx = \left[\dot{u}\, u'\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(u')^2 + 2(u'')^2\, dx$$

$u'(1,t) = 0$

$\dot{u}(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\underbrace{u(0,t)}_{=0}\big) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2 = -\|u''\|^2 \leq 0$$

$\Rightarrow$ u' avtar

c) Tidsintegration av första likheten i a) ger

$$\|u(\cdot,T)\|^2 + 2\int_0^T \|u'\|^2\, dt = \|u(\cdot,0)\|^2 = C$$

För att integralen ska konvergera då $T \to \infty$ krävs att $\|u'\|^2 \to 0$

d) I fallet med värmeledning kommer temperaturen att avta (mot randvärdet: $x=0$) samt att värmeflödet går mot 0.

5. Utöka problemet till hela $\mathbb{R}$ med udda begynnelsedata:

$$\begin{cases} \ddot{w} - 4w'' = 0 \\ w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -u_0(-x) & x<0 \\ 0 & x=0 \\ u_0(x) & x>0 \end{cases} \\ \dot{w}(x,0) = 0 \end{cases}$$

D'Alemberts formel ger

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left(w_0(x+2t) + w_0(x-2t)\right)$$

där $w(x,t) = u(x,t)$ för $x>0$

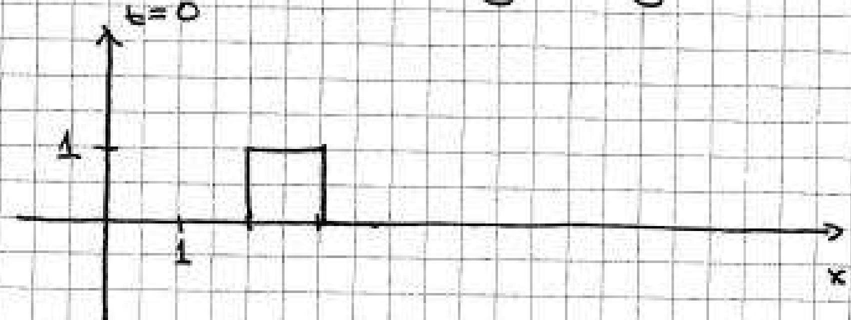
För $x \geq 2t$ har vi $\quad w_0(x+2t) = u_0(x+2t)$
$\quad w_0(x-2t) = u_0(x-2t)$

För $0 < x < 2t$ har vi $\quad w_0(x+2t) = u_0(x+2t)$
$\quad w_0(x-2t) = -u_0(2t-x)$

Vi får alltså:

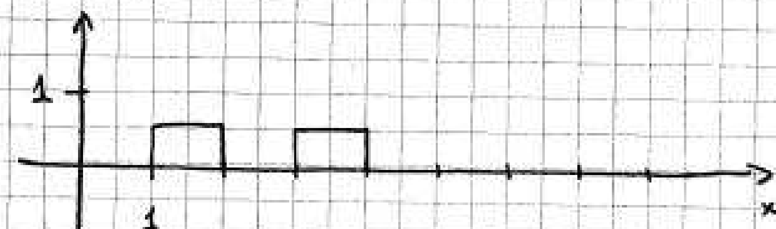
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_0(x+2t) + u_0(x-2t)\right) & x \geq 2t \\ \frac{1}{2}\left(u_0(2t+x) - u_0(2t-x)\right) & x < 2t \end{cases}$$

Med $u_0(x)$ enligt figuren

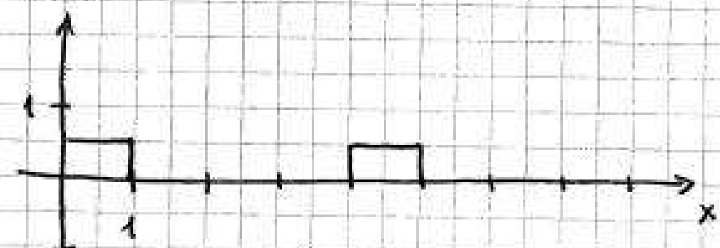


får vi

t = 0.5



t = 1



t = 2