TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15
Telefonjour/rond: Erik Broman, tel. 0740-459022
Hjälpmedel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.
==

Som vanligt betecknar $\dot{u}$ tidsderivata, u' och ∇u betecknar x-derivata resp. gradient m.a.p. $x = (x_1, .., x_d)$ av $u(x,t)$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ betecknar Laplaceoperatorn, $||u||_\omega$ betecknar L_2-norm av u över ω, och f är givna data.

1. a) Redogör för en lämplig finit element metod för problemet

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f \quad \text{för } 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u = 0 \quad \text{för } t = 0, \quad u'(0,t) = u'(1,t) = 0 \quad \text{för } t > 0. \end{cases}$$

b) Skissera det förväntade utseendet av $u(x,1)$ och $u(0,t)$ för $f(x,t) = x$. (10p)

2. Låt u vara lösningen till

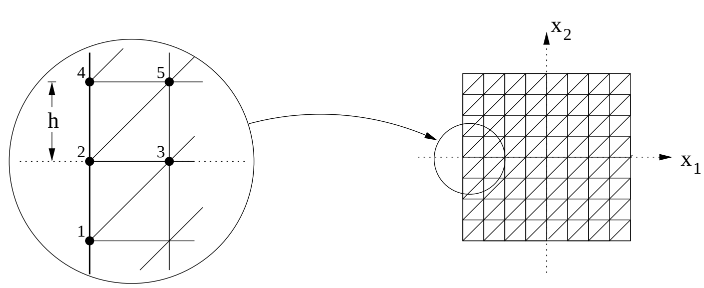
$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{i } \Omega \\ -\partial_n u = ku \quad \text{på } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

där Ω är ett område i R^d, med rand Γ, $\partial_n u = n \cdot \nabla u$ är riktningsderivatan av u i utåtriktade enhetsnormalens riktning, och $k \geq 0$ är en konstant.
a) Visa att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$. Tips: multiplicera med u, integrera, och utnyttja olikheterna

$$||u||_\Omega \leq C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega) \tag{2}$$

och $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.
b) Härled uppskattningen (2). Tips: Tag hjälp av en (snäll) funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ och utnyttja att $||u||^2_\Omega = \int_\Omega u^2 \Delta\phi = ...$ (10p)

3. Låt Ω vara området i figur, med given triangulering och nodnummer, och låt



U vara den styckvis linjära cG1 lösningen till problemet (1) i uppgift 2, med $f = 1$ och $k = 0$ i den aktuella (fokuserade) delen av området.
a) Vilket samband råder (givet av testfunktionen ϕ_2) mellan nodvärdena U_1, U_2, U_3, U_4 och U_5?
b) Vilket blir motsvarande samband om ekvationen ändras till $-\Delta u + (1,0) \cdot \nabla u = 1$ alternativt (välj ett av fallen!) $-\nabla \cdot a \nabla u = 1$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$? (10p)

4. Funktionerna

a) $\frac{1}{4\pi|x|}$ b) $\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ och c) $\int_{R^3} \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$

är lösningar till fundamentala differentialekvationsproblem. Vilka? Glöm ej att ange typ av område/rumsdimension, begynnelsevillkor och randvillkor!
d) En punktvärmekälla med intensitet 1 per volymsenhet har verkat i origo i 3D under (mycket) lång tid, utgående från 0-temperatur överallt. Ange en formel för den resulterande temperaturfördelningen i 3D-rummet.
e) Utgående från temperaturfördelningen i d) "slocknar" plötsligt värmekällan vid $t = 0$. Hur utvecklas temperaturen i origo för $t > 0$. (10p)

5. Betrakta
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds.$$
Uppenbarligen gäller $u(x,0) = 0$.
a) Visa att även $\dot{u}(x,0) = 0$. Tips: se Beta avsnitt "Differential formulas".
b) Visa att u löser vågekvationen $\ddot{u} - u'' = f$.
c) Skissera $u(x,1)$ för $-3 \leq x \leq 3$ om $f = 1$ för $-1 < x < 1$ och $f = 0$ för övrigt. (10p)

Lycka till / K.E.

TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15, lösningar

===

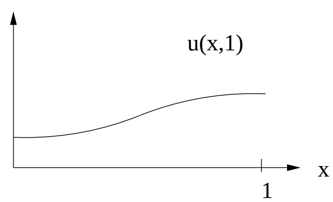
1. a) Se föreläsningsant eller bok. cG1cG1-ansatsen $U(x,t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t)$ med $U_n(x) = \sum_{j=0}^{M} U_{n,j}\phi_j(x)$ insatt i variationsformuleringen $\int_0^1 v'u' = \int_0^1 vf$ av problemet med testfunktionerna $v = \phi_i, i = 0,..,M$, resulterar i ekvationssystemet

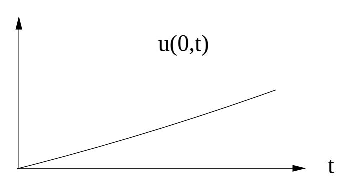
$$(M + \frac{k}{2}S)U_n = (M - \frac{k}{2}S)U_{n-1} + kb_n,$$

där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, U_n är nodvärdesvektorn med element $U_{n,j}$, M är massmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i\phi_j$, S styvhetsmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i'\phi_j'$, och b_n är lastvektorn med element $\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^1 \phi_i f$. Motsvarande för dG0 ($\approx$ implicit Euler) tidsstegning ger

$$(M + kS)U_n = MU_{n-1} + kb_n,$$

b)





2. a) Multiplikation av $-\Delta u = f$ med u, integration över Ω, och partiell integration med utnyttjande av randvillkoret $-\partial_n u = ku$, samt Cauchys olikhet och olikheten $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ger

$$||\nabla u||_\Omega^2 + k||u||_\Gamma^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \int_\Gamma u(\overbrace{-\partial_n u}^{=ku}) = \int_\Omega u(-\Delta u) = \int_\Omega uf$$

$$\leq ||u||_\Omega\,||f||_\Omega \leq C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega)\,||f|| = ||u||_\Gamma C_\Omega||f||_\Omega + ||u||_\Omega C_\Omega||f||_\Omega$$

$$\leq \frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + C_\Omega^2||f||_\Omega^2$$

Efter subtraktion av $\frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2$ från båda led följer att

$$(k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \leq \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + (k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \leq C_\Omega^2||f||_\Omega^2,$$

vilket ger att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$, v.s.v.

b) Enligt tips fås med snäll funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ att

$$||u||_\Omega^2 = \int_\Omega u^2\Delta\phi = \int_\Gamma u^2\partial_n\phi - \int_\Omega \overbrace{\nabla u^2}^{2u\nabla u} \cdot \nabla\phi$$

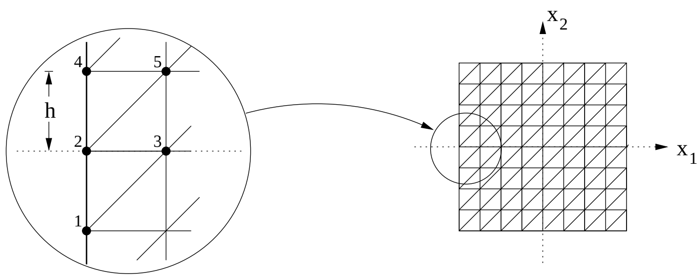
$$\leq C_1||u||_\Gamma^2 + C_2||u||\,||\nabla u|| \leq C_1||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||u||_\Omega^2 + \frac{1}{2}C_2^2||\nabla u||_\Omega^2,$$

dvs

$$||u||_\Omega^2 \leq 2C_1||u||_\Gamma^2 + C_2^2||\nabla u||_\Omega^2 \leq C^2(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega)^2,$$

där $C^2 = \max(2C_1, C_2^2)$, $C_1 = \max_\Gamma|\partial_n\phi|$, $C_2 = \max_\Omega(2|\nabla\phi|)$, v.s.v.

3. a) Med U uttryckt i basfunktionerna ϕ_j, $j = 1,2,3,4,5,..$ och med testfunktion $v = \phi_2$ i variationsformuleringen av problemet erhålls sambandet $-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 = \frac{1}{2}h^2$



b) Med ekv ändrad till $-\Delta u + (1,0)\cdot\nabla u = 1$ blir sambandet

$$-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 - \frac{h}{3}U_2 + \frac{h}{3}U_3 - \frac{h}{6}U_4 + \frac{h}{6}U_5 = \frac{1}{2}h^2,$$

och med ekv. ändrad till $-\nabla\cdot a\nabla u = f$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$ blir det $-\frac{1}{2}U_1 + 3U_2 - \frac{3}{2}U_3 - U_4 = \frac{1}{2}h^2$

4. a) $\frac{1}{4\pi|x|}$ lösning till $-\Delta u = \delta$ i R^3 med randvillkor $u \to 0$ då $r = |x| \to \infty$.

b) $\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ lösning till $\dot{u} - \Delta u = 0$ i $x \in R^3$, $t > 0$ med begynnelsevillkor $u = \delta$ för $t = 0$ och randvillkor som i a).

c) $\int_{R^3}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$ är lösning till samma problem som i b) men med begynnelsevärdet $u = v$ för $t = 0$.

d) Lösningen i a)

e) Lösningen i d) med $v = \frac{1}{4\pi|y|}$, dvs

$$\begin{aligned}\int_{R^3}\tfrac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|0-y|^2}{4t}}\tfrac{1}{4\pi|y|}\,dy &= \tfrac{1}{t^{3/2}}4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}}\tfrac{1}{4\pi r}r^2\,dr\\ &= \{s = \tfrac{r^2}{4t}\} = \tfrac{2}{t^{1/2}}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = 2\tfrac{1}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

5. a) Tidsderivatan av $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s}f(y,s)\,dy\,ds$ blir

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tfrac{1}{2}\int_{x-t+t}^{x+t-t}f(y,t)\,dy + \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s)(-1)\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s) + f(x-t+s),\end{aligned}$$

dvs för $t = 0$ fås $\dot{u}(x, 0) = 0$.
b) Ytterligare en tidsderivering ger

$$\ddot{u} = f(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+t-s,s) - f'(x-t+s,s).$$

Derivering m.a.p. x ger $u'(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s)$ och

$$u''(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+t-s,s) - f'(x-t+s,s),$$

dvs $\ddot{u} - u'' = f$, vilket skulle visas.
c)