**TMA 690 Partiella differentialekvationer F, 2000-01-12**
Hjälpmedel: Beta och typgodkänd kalkylator.
Telefonjour/rond: Anders Logg, ankn. 0740-459022.
==========================================

Som vanligt betecknar $\dot{u}$ derivatan av $u = u(t)$, och $\|u\|_X$ betecknar $L_2$ normen av $u$ över aktuellt område $X$. Lycka till!!

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u} + au = f \text{ för } t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

där $a(t)$, $f(t)$ och $u_0$ är givna data, och där vi söker $u = u(t)$.
a) Visa att om $a(t) \geq a_0$ för någon konstant $a_0$, så gäller

$$|u(t)| \leq e^{-a_0 t}(|u_0| + \int_0^t e^{a_0 s}|f(s)|\, ds).$$

Tips: Visa med hjälp av identiteten $\dot{u}u = |u|\frac{d}{dt}|u|$ att $\frac{d}{dt}|u| + a_0|u| \leq |f|$, och ta sedan hjälp av en integrerande faktor.
b) Formulera cG1-metoden för problemet, samt visa att villkoret $\frac{1}{2}a_0 k > -1$, där $k$ är tidssteget, garanterar att metoden inte bryter samman (leder till division med noll).

2. Betrakta problemet

$$-\Delta u + u = f \text{ i } \Omega, \quad n \cdot \nabla u = g \text{ på } \Gamma, \tag{1}$$

där $\Omega$ är ett givet område i $R^d$ med rand $\Gamma$, $n$ är enhetsnormalen till $\Gamma$ riktad ut från $\Omega$, $f$ och $g$ är givna data, och $\Delta$ är Laplace operatorn.
a) Visa att

$$\|\nabla u\|_\Omega^2 + \|u\|_\Omega^2 \leq C(\|f\|_\Omega^2 + \|g\|_\Gamma^2)$$

för någon konstant $C$.
Tips: Utnyttja bl.a. att $\|u\|_\Gamma \leq C_\Omega(\|\nabla u\|_\Omega + \|u\|_\Omega)$ för någon konstant $C_\Omega$.
b) Formulera en finit element metod för (1) samt ställ upp det resulterande ekvationssystemet i fallet med en rumsdimension med $\Omega = [0, 1]$, $f(x) = 1$ och $g(0) = 7$, $g(1) = 0$.

3. a) Härled en feluppskattning för metoden i 2 b) uttryckt i elementstorleken $h$ och lösningens andraderivata, alternativt den beräknade lösningens residual.

b) Härled en uppskattning för $u$'s andraderivata uttryckt i givna data $f$ och $g$. Under vilken förutsättning gäller en motsvarande uppskattning för $u$'s andraderivator i högre dimension, dvs för $d = 2, 3$.

4. a) Härled (grova) uppskattningar för antalet räkneoperationer som krävs för lösning av det resulterande finita element ekvationsystemet för problemet (1) i fallet $d = 2$ resp $d = 3$ uttryckt i elementstorleken $h$ om systemet löses med vanlig (Gauss) elimination.
b) Redogör kort för idérna bakom, principerna för, och fördelarna med en multigrid metod.

5. Verifiera att $g(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{|x|}}{|x|}$ för $d = 3$ (dvs $x = (x_1, x_2, x_3)$) satisfierar $-\Delta g + g = \delta(x)$, där $\delta$ är Diracs delta funktion, och att följaktligen $u(x) = \int_\Omega g(x, y)\, f(y)\, dy$ ger en lösning till differentialekvationen i (1) (bortsett från randvillkoret, vilket vi här ser som en annan historia). Tips: Verifiera först att $-\Delta g + g = 0$ för $x \neq 0$. Räkna med rumspolära koordinater. Verifiera sedan att

$$\int_{R^3} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \{\text{via partiell integration}\}$$

$$= v(0) = \int_{R^3} \delta v,$$

vilket ju är den givna ekvationen i variationsform.

**TMA 690 Partiella differentialekvationer F, 2000-01-12**
Lösningar
==========================================

1. Multiplikation av ekvationen med $u$ ger

$$\dot{u}u + au^2 = fu,$$

varav

$$|u|\frac{d}{dt}|u| + a_0|u|^2 \leq |f||u|,$$

dvs $\frac{d}{dt}|u| + a_0|u| \leq |f|$. Multiplikation med integrerande faktorn $e^{a_0 t}$ ger $\frac{d}{dt}(e^{a_0 t}|u|) \leq e^{a_0 t}|f|$, vilket integrerat blir $e^{a_0 t}|u(t)| - |u_0| \leq \int_0^t e^{a_0 s}|f(s)|ds$, vilket ger den sökta olikheten.
cG1 metoden: Ansätter på tidsintervallet $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ lösning $U(t) = U_n(t_{n+1} - t)/k + U_{n+1}(t - t_n)/k$. Söker $U_{n+1}$ så att

$$\int_{I_n} \dot{U} + aU = \int_{I_n} f$$

dvs

$$U_{n+1}(1 + k\int_{I_n} a(t - t_n)dt) = U_n - kU_n \int_{I_n} a(t)(t_{n+1} - t)dt + \int_{I_n} f\, dt$$

Division med $1 + k\int_{I_n} a(t - t_n)dt$, som är $> 0$ enligt antagandet, ger $U_{n+1}$ utan problem!

2. a) Multiplikation av ekvationen med $u$ ger efter partiell integration

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + uu - \int_\Gamma n \cdot \nabla u\, u = \int_\Omega fu$$

dvs

$$\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 = \int_\Omega fu + \int_\Gamma gu \leq \|f\|\,\|u\| + \|g\|_\Gamma\, C_\Omega(\|\nabla u\| + \|u\|)$$

där $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\Omega$ och där vi utnyttjat olikheten $\|u\| \leq C_\Omega(\|\nabla u\| + \|u\|)$. Genom att nu utnyttja olikheten $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$ erhålls

$$\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \leq \|f\|^2 + \frac{1}{4}\|u\|^2 + C\|g\|_\Gamma^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4}\|u\|^2$$

varav den sökta olikheten följer.
b) Ansätter $U(x) = \sum U_j \phi_j(x)$ vilket insättes på $u$'s plats i variationsformuleringen

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gv$$

med $v = \phi_i$ vilket ger

$$\sum_{j=1}^{N} U_j \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + \phi_j \phi_i = \int_\Omega f\phi_i + \int_\Gamma g\phi_i \quad i = 1, .., N.$$

dvs $AU = b$ där $U = (U_1, .., U_N)^\top$, $b = (b_i)$ med element

$$b_i = h, i = 2, .., N-1, \quad b(N) = h/2, \quad b(1) = h/2 + 7,$$

och $A = (a_{ij})$ med element

$$a_{ij} = -1/h + h/6, \quad \text{för } i = j+1 \text{ och } i = j-1 a_{ij} = 2/h + 2h/3, \quad \text{för } i = j, i = 2, .., N-1, a_{ij} = 1/h+$$

3. a) Felekvationen $\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla v + ev = 0$, för elementfunktioner $v$, ger

$$\|\nabla e\|^2 + \|e\|^2 = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla (u-v) + e(u-v) \leq \frac{1}{2}\|\nabla e\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\| + \frac{1}{2}\|e\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2,$$

dvs

$$\|\nabla e\|^2 + \|e\|^2 \leq \|\nabla (u-v)\|^2 + \|u-v\|^2 \leq C\|hu''\|^2,$$

om $v$ är lämplig interpolant av $u$.
b) Ekvationen ger $\|u''\| = \|u - f\| \leq \|f\| + \|u\| \leq C(\|f\| + \|g\|_\Gamma)$, där vi i sista ledet använt uppskattningen i 2a.
I högre dimension erhålls analogt $\|\Delta u\| \leq C(\|f\| + \|g\|_\Gamma)$. Enskilda andra derivator av $u$ kan sedan uppskattas med $\Delta u$ om $\Omega$ är konvext.

4. a) Styvhetsmatrisen $A$ har bandbredd $n = 1/h$ för $d = 2$ och $n = 1/h^2$ för $d = 3$. Antalet räkneoperationer som krävs för Gausselimination är $Nn^2$, där $N = 1/h^2$ resp $N = 1/h^3$ är antalet obekanta. Dvs antalet operationer blir $1/h^4$ för $d = 2$ och $1/h^7$ för $d = 3$, där vi tänkt oss att området ifråga är enhetskuben.
b) Se förelšningsanteckningarna

5. Verifierar först att $-\Delta g + g = 0$ för $|x| > 0$. Ekvationen $-\Delta g + g = \delta$ multipliceras med testfunktion $v$ sådan att $v \to 0$ då $|x| \to \infty$, och integreras över $R^3$: Efter partiell integration erhålls

$$\int_{R^3} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \int_{R^3} \delta v = v(0).$$

Undersöker om $g = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{|x|}}{|x|}$ uppfyller detta:

$$\int_{R^3} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \nabla g \cdot \nabla v + gv$$

$$= \int_{|x|>\epsilon} (-\Delta g + g)v + \int_{|x|=\epsilon} n \cdot \nabla g v = \int_{|x|=\epsilon} \frac{1}{4\pi}(\frac{e^{\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{e^{\epsilon}}{\epsilon})v \to v(0),$$

då $\epsilon \to 0$, vilket skulle visas. Har här utnyttjat att $-\Delta g + g = 0$ för $|x| > 0$.