TMA690, Partiella differentialekvationer F2, tentamen 990824
Telefonjour/rond: Patrik Lundström, ankn. 5325.
Hjälpmedel: Beta (formelsamling), typgodkänd miniräknare/kalkylator.
==

Som vanligt betecknar u' x-derivatan och $\dot{u}$ t-derivatan av $u(x,t)$, och $\|\cdot\|$ betecknar L_2-norm i rumsled (x-led). För godkänt krävs 25 poäng. Lycka till !!

1. Betrakta problemet

$$q' = f \text{ för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\ q(1) = u_1,$$

där $q = -u'$, och där $f = f(x)$ och u_1 är givna data.
Visa att för lösningen $u = u(x)$ gäller
a) $||u'|| \leq ||f|| + |u_1|$. Tips: Utnyttja att $|u(1)| \leq ||u'||$ och $||u|| \leq ||u'||$, eftersom $u(0) = 0$.
b) Visa hjälpresultaten i tipset.
c) Formulera ett "motsvarande" problem i två (eller tre) rumsdimensioner. (10p)

2. Formulera en finit element metod för beräkning av en approximativ lösning U till problemet i uppgift 1. Vilket ekvationssystem erhålles för U's nodvärden i fallet $f = 1$, $u_1 = 7$. (10p)

3. Härled "optimala" uppskattningar för felen a) $||u' - U'||$ b) $||u - U||$ för u och U som i uppgift 1 och 2. Interpolationsuppskattningar får utnyttjas utan bevis. (10p)

4. Under vilka förutsättningar på "viss" och b är det rimligt att använda lösningen till problemet i uppgift 1 som en approximation av lösningen efter viss tid till ekvationen a) $\dot{u} - u'' = f$ b) $\ddot{u} + b\dot{u} - u'' = f$ för $0 < x < 1$, $t > 0$, med randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'(1,t) = -u_1$ för $t > 0$, och givna begynnelsevillkor. Motivera utförligt!
c) Betrakta vågekvationen $\ddot{u} - u'' = f$ med $f(x,t) = e^{i\omega t}g(x)$. Ansätt lösningen $u(x,t) = e^{i\omega t}v(x)$. Vilken ekvation erhålls för v? (10p)

5. Betrakta stationär värmeledning i en rörisolering med radiell symmetri. Ställ upp en lämplig matematisk modell för detta inklusive randvillkor och beräkna temperaturfördelningen i det isolerande materialet. (10p)

TMA690, Partiella differentialekvationer F2, tentamen 990824 - lösningar
==

1. Multiplicerar ekvationen $f = q'$ med u och integrerar:

$$\int_0^1 fu\,dx = \int_0^1 q'u\,dx = q(1)u(1) - \int_0^1 qu'\,dx = u_1 u(1) - \int_0^1 u'u'\,dx,$$

vilket m.h.a. Cauchys olikhet och tipsen ger

$$||u'|| = \int_0^1 (u')^2\,dx = \int_0^1 fu\,dx - u_1 u(1) \leq ||f||\,||u|| + |u_1|\,|u(1)| \leq (||f|| + |u_1|)\,||u'||.$$

Härav följer a).

Randvillkoret $u(0) = 0$ get $u(x) = \int_0^x u'(y)\,dy$. Speciellt ger $x = 1$ att $|u(1)| = |\int_0^1 u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq ||u'||$, där vi åter använde Cauchy's olikhet i sista ledet. Detta visar den ena olikheten. På samma sätt erhålls $|u(x)| \leq \int_0^x |u'| \leq \int_0^1 |u'| \leq ||u'||$. Denna ger $||u||^2 = \int_0^1 |u|^2 \leq \int_0^1 ||u'||^2 \leq ||u'||^2 \int_0^1 \leq ||u'||^2$, vilket ger den andra olikheten.

c) Ekvationernas motsvarighet i högre dimension är $q = -\nabla u$, $\mathrm{div} q = f$ i ett givet område Ω i planet, med $u = 0$ på en given del av randen, och $q \cdot n = h$ på den återstående delen, där n är enhetsnormalvektor till randen.

2. Se föreläsningsanteckningar eller bok. Leder fram till ekvationssystemet $A\xi = b$, med $b_i = h$ för $i < M$, $b_M = h - u_1$, $A_{ii} = 2/h$, $A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -1/h$, $A_{ij} = 0$ för övrigt, där ξ_i är U's nodvärde i punkten $x_i = ih$, $h = 1/M$.

3. Se föreläsningsantecknigar eller bok.

4. För värmeledningsekvationen i a) gäller att lösningarna succesivt glömmer sina begynnelsevärden med tiden, dvs kan efter “lång” tid approximeras med lösningen till motsvarande stationära problem i uppgift 1, oavsett de givna begynnelseförutsättningarna i det tidsberoende problemet.

Vågekvationen i b) har samma egenskaper om $b > 0$. Om däremot $b = 0$ finns inflytandet av begynnelseförutsättningarna kvar och med godtyckliga sådana kan man ej hoppas att lösningen till 1 ligger nära lösningen till det tidsberoende problemet, ens efter lång tid.

c) Insättning i ekvationen get $\ddot{u} = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t} v(x)$. Dvs efter förkortning med faktorn $e^{i\omega t}$ blir ekvationen för v följande: $-\omega^2 v - v'' = g$.

5. Ekvationen för stationär värmeledning utan inre värmekkälla är $\Delta u = 0$. Pga symmetrin gäller $u = u(r)$ där $r^2 = x^2 + y^2$. För sådana vinkeloberoende lösningar gäller (se Beta) $\Delta u = \frac{1}{r}(ru')' = 0$. Problemet blir alltså $(ru')' = 0$ för $1 < r < 2$, för ett rör med innerradie 1 och ytterradie 2, med randvillkor $u(1) = u_1$ och $u(2) = u_2$ i fallet med givna temperaturer inne i röret och utanför detsamma.

Lösningen till $(ru')^r = 0$ ges av $ru' = c$, dvs $u' = \frac{c}{r}$, dvs $u = \frac{c}{\ln}(r) + d$. Randvillkoret $u(1) = u_1$ ger $d = u_2$, varav sedan följer att $c = \frac{u_2 - u_1}{\ln(2)}$.