TMA690, Partiella differentialekvationer F2, tentamen 990113
Telefonjour/rond:
Hjälpmedel: Beta (formelsamling), typgodkänd miniräknare/kalkylator.
==
Som vanligt betecknar u' och $\dot{u}$ derivator, och $\|\cdot\|$ betecknar L_2-norm över aktuellt område. För godkänt krävs 25 poäng. Lycka till !!

1. Betrakta problemet att hitta $u(x)$ så att

$$q' = f, \quad \text{där} \quad q = -au', \qquad \text{dvs} \quad -(au')' = f,$$

för $0 < x < 1$, $u(0) = 1$ och $q(1) = 0$, där f och $a > 0$ är givna funktioner av x.
a) Ge en fysikalisk tolkning av problemet genom att ange vad u, a, q och f kan tänkas representera, samt härled/motivera ekvationerna i det aktuella fallet.
b) Visa för $a = 1$ att $\|q\|^2 \leq 4\|f\| + \|f\|^2$.
Tips: Visa att

$$\|q\|^2 \leq \|f\|\,(1 + \|u\|) \quad \text{och att} \quad \|u\| \leq 1 + \|q\|,$$

samt utnyttja olikheten $\|f\|\,\|q\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|q\|^2$. (10p)

2. a) Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i uppgift 1, samt ställ upp motsvarande ekvationssystem i fallet $a = 1$ för $x < \frac{1}{2}$, $a = 2$ för $x > \frac{1}{2}$, och $f = 1$, med steglängd h.
b) Ange en feluppskattning för den beskrivna metoden.
c) Vilka två möjligheter står till buds om felet visar sig för stort och man önskar hitta en bättre (noggrannare) lösning? (10p)

3. a) Betrakta problemet att hitta $u(t)$ och $v(t)$ sådana att

$$\dot{u} = v \quad \text{och} \quad \dot{v} = -u - bv,$$

för $t > 0$ med givna begynnelsevärden $u(0) = u_0$ och $v(0) = v_0$. Formulera cG1-metoden för detta problem, samt beräkna U_1 och V_1, dvs lösningen efter det första tidssteget, i fallet $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ och $b = 0$ med tidssteg $k = 0.2$.
b) Visa att $U_n^2 + V_n^2 \leq U_{n-1}^2 + V_{n-1}^2$ för $b \geq 0$, med likhet för $b = 0$.
Finns någon fysikalisk tolkning? (10p)

4. a) Betrakta lösningen u till problemet i uppgift 1 i fallet $a = 1$ och med randvillkoret $u(0) = 1$ ersatt med $u(0) = 0$, och betrakta mängden $P = \{p(x) : p' = f \text{ för } 0 < x < 1,\, p(1) = 0\}$. Notera att $q = -u' \in P$. Visa att

$$\int_0^1 (p + u')\, u'\, dx = 0,$$

och att detta ger

$$\|p\|^2 = \|(p+u') - u'\|^2 = \|p + u'\|^2 + \|u'\|^2 \geq \|u'\|^2 = \|q\|^2$$

för alla $p \in P$, dvs att q minimerar $\|p\|$ i P.
b) Vad minimerar q i fallet med variabelt a? (10p)

5. Bestäm en lösning $u(x,t)$ till "pulsarekvationen"

$$\ddot{u} - \Delta u = e^{it}\delta(x),$$

där $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $i = \sqrt{-1}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ och δ är Diracs deltafunktion. Tips: Ansätt $u = e^{it}v(x)$ och sedan $v(x) = w(r)/r$ där $r = |x|$ (som i en uppgift på hemtentan). Vidare bör gälla att $rv = w \to \frac{1}{4\pi}$ då $r \to 0$ (jfr lösningen $v = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$ till $-\Delta v = \delta$).

(10p)

Lösningar till
Partiella differentialekvationer F2, 990113
1. a) u temperatur, a konduktivitet (värmeledningsförmåga), q värmeflöde och f given värmeproduktion. Ekvationerna uttrycker att värmen $f(x)\,dx$ som produceras i ett intervall av (infinitesimal) längd dx vid punkten x är lika med värmeutflödet från intervallet, dvs $q(x+dx)-q(x)$ (energin bevaras), resp. att värmeflödet är proportionellt mot temperaturfallet (Fouriers lag). Randvillkoret $q(1)=0$ uttrycker isolering (inget värmeutflöde) vid $x=1$.
b) Vi multiplicerar ekvationen för q med $v=u-1$, integrera över $[0,1]$, och utnyttja partiell integration:

$$\int_0^1 f\,v\,dx = \int_0^1 q'\,v\,dx = -\int_0^1 q\,v'\,dx = \int_0^1 q^2\,x.$$

Obs: Inga randtermer p.g.a. villkoren. Cauchys olikhet ger nu $\|q\|^2 = \int_0^1 q^2\,dx = \int_0^1 f\,v\,dx \le \|f\|\,(\|u\|+1)$. Vidare gäller $u(x)=u(0)+\int_0^x u'(s)\,ds$, där $u(0)=1$ och $|\int_0^x u'(s)\,ds| \le \int_0^1 |u'|ds \le \|u'\|$, m.h.a. Cauchys olikhet igen. Speciellt följer att $\|u\| \le \max_{x\in[0,1]}|u(x)| \le 1+\|q\|$. Sammanfattningsvis alltså $\|q\|^2 \le 2\|f\| + \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|q\|^2$ varav den sökta olikheten följer.

2. Inför nodpunkter $x_i = ih$, $i=0,1,..,2N$ och motsvarande kontinuerliga styckvis linjära basfunktioner $\phi_i(x)$ med $\phi_i(x_i)=1$ och $\phi_i(x_j)=0$ för $j\ne i$. Ansätter $U=\phi_0(x)+\sum_{i=1}^{2N} U_i\phi_i(x)$ vilket insättes på u's plats i $\int_0^1 a\,u'\,\phi'\,dx = \int_0^1 f\,\phi\,dx$, som erhållits genom multiplikation av ekvationen $-(au')'=f$ med ϕ sådan att $\phi(0)=0$ och integration över $[0,1]$, m.h.a. partiell integration. Genom att välja testfunktionen ϕ som ϕ_i, $i=1,..,2N$, erhålles ett ekvationssystem för nodvärdena U_i, med "styvhetsmatrisen"

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & .. & & & & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & 0 & .. & & & & & & & \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & & & \\
 & & .. & & & & & & & & & \\
 & & .. & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & .. & & & \\
 & & & .. & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & .. & & \\
 & & & & .. & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & .. & \\
 & & & & & & .. & & & & & \\
 & & & & & & & .. & 0 & -2 & 4 & -2 \\
 & & & & & & & & .. & 0 & -2 & 2
\end{bmatrix}$$

och "lastvektorn" $[1/h+h, h, h, .., h, h/2]'$ i högerledet.
b) En feluppskattning för metoden av a posteriori typ är

$$\|\sqrt{a}(u'-U')\| \le C\|hf\|,$$

eftersom i detta fall residualen $R = f + (aU')'$ reduceras till f.
En a priori feluppskattning är

$$\|\sqrt{a}(u'-U')\| \le Ch\|\sqrt{a}u''\|.$$

c) För att minska felet kan man antingen minska h eller använda polynomapproximation av högre grad, t.ex. styckvis kvadratiska funktioner.

3. cG1-metoden reduceras i detta fall till

$$\begin{aligned}U_{n+1} - U_n &= \tfrac{k}{2}(V_{n+1}+V_n)\\ V_{n+1} - V_n &= -\tfrac{k}{2}(U_{n+1}+U_n) - b\tfrac{k}{2}(V_{n+1}+V_n).\end{aligned}$$

Speciellt ger detta med $b = 0$ och $n = 0$ ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + \frac{k}{2}v_0 \\ -\frac{k}{2}u_0 + (1-\frac{k}{2})v_0 \end{bmatrix}$$

vilket med $k = .2$ och $u_0 = 1$ och $v_0 = -2$ reduceras till

$$\begin{bmatrix} 1 & -.1 \\ .1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 \\ -2.1 \end{bmatrix}$$

med lösning $U_1 = .59/1.01$ och $V_1 = -2.18/1.01$.
b) Genom att multiplicera ekvationerna för U_{n+1} och V_{n+1} med $V_{n+1} - V_n$ resp $-(U_{n+1} - U_n)$ och addera de två erhhålles

$$0 = \frac{k}{2}(V_{n+1}^2 - V_n^2) + \frac{k}{2}(U_{n+1}^2 - U_n^2) + b(U_{n+1} - U_n)^2,$$

där vi utnyttjat konjugatregeln och att $\frac{k}{2}(V_{n+1}+V_n) = U_{n+1} - U_n$. Den sökta olikheten följer nu lätt.

4. a) Vi har m.h.a. partiell integration (Obs: inga randtermer) att $\int_0^1 (p + u')\, u'\, dx = -\int_0^1 (p' + u'')\, u\, dx = -\int_0^1 (f - f)\, u\, dx = 0$. Detta ger den andra likheten ty

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\int_0^1 v\, w\, dx,$$

här tillämpat på $v = p + u'$ och $w = u'$. Övriga delar är triviala!
b) I fallet med variabelt a minimeras $\|\frac{1}{\sqrt{a}}p\|$ av $p = q$.

5. Insättning av ansatsen i ekvationen ger

$$-e^{it}v - e^{it}\Delta v = e^{it}\delta.$$

dvs

$$-\Delta v - v = \delta.$$

Insättning av $v = w/r$ ger (som i en av hemtentauppgifterna) att

$$-w'' - w = 0,$$

för $r > 0$, med lösning $w = a\cos(r) + b\sin(r)$. För den sökta lösningen måste gälla $a = \frac{1}{4\pi}$ (jfr lösningen $v = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$ till ekvationen $-\Delta v = \delta$), medan b kan väljas godtyckligt, t.ex. som $b = 0$ ($\frac{\sin(r)}{r}$ löser den homogena ekvationen $-\Delta v - v = 0$). Vi har alltså hittat lösningen $v = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos(r)}{r}$ och motsvarande $u = e^{it}\frac{1}{4\pi}\frac{\cos(r)}{r}$.