Partiella differentialekvationer F2, tentamen 980825
Telefonjour/rond:
Hjälpmedel: Beta (formelsamling), typgodkänd miniräknare/kalkylator.
===
Som vanligt betecknar u' x-derivatan och $\dot{u}$ t-derivatan av $u(x,t)$, och $\|\cdot\|$ betecknar L_2-norm i rumsled (x-led). För godkänt krävs 25 poäng. Lycka till !!

1. Betrakta problemet att hitta $u = u(x,t)$ bestämd av

$$\dot{u} = f - q', \text{ där } q = -au', \qquad \text{dvs} \quad \dot{u} - (au')' = f,$$

för $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$ och $q(1,t) = 0$ för $t > 0$, och $u(x,0) = u_0(x)$ för $0 < x < 1$, där f och $a > 0$ är givna funktioner av x och t.
a) Ge en fysikalisk tolkning av problemet. Ange speciellt vad u, a, q och f kan tänkas representera.
b) Härled/motivera ekvationerna för $\dot{u}$ resp. q för $0 < x < 1$, $t > 0$.
c) Formulera ett motsvarande problem med fler än en rumsdimension. För tydlighets skull: skriv ut alla partiella derivator på formen $\frac{\partial w}{\partial s}$. (10p)

2. Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i uppgift 1, med $a = 1 + x$ och $f = 1$. Metoden skall reduceras till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen. (10p)

3. Visa att för u som i uppgift 1 med $a = 1$ och $\|u\| = \|u(\cdot,t)\|$ gäller,
om $f = 0$:
a) $\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 = 0$, b) $\|u(\cdot,t)\| \le e^{-t}\|u_0\|$.
tips: visa med hjälp av a) och olikheten $\|u\| \le \|u'\|$ att $\frac{d}{dt}(\|u\|^2\, e^{2t}) \le 0$ som integreras
om $f = f(x)$:
c) $\|u - u_s\| \to 0$ då $t \to \infty$,
där $u_s = u_s(x)$ är lösningen till motsvarande stationära problem

$$-(au')' = f \text{ för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0 \text{ och } u'(1) = 0.$$

tips: tillämpa b) på $w = u - u_s$ som ju satisfierar $\dot{w} - (aw')' = 0$. (10p)

4. Härled (gärna utgående från d'Alemberts formel i Beta, sid. 178) formler för lösningen till $\ddot{u} = c^2 u''$ för $x > 0$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ och $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ för $x > 0$, och a) $u(0,t) = 0$, b) $u(0,t) = g(t)$ för $t > 0$. (10p)

5. Visa att u_s i uppgift 3c minimerar en viss funktional $F(v)$ i ett visst funktionsrum V, dvs att problemet även kan formuleras som ett minimeringsproblem. (10p)

Partiella differentialekvationer F2, tentamen 980825
Lösning
==
1. a) Ekvationerna beskriver hur temperaturen u utvecklas med tiden t i ett (endimensionellt) område $0 < x < 1$ med given värmeproduktion f med randvillkoren att $u = 0$ vid $x = 0$ och att värmeflödet q hålls $= 0$ (isolering) vid $x = 1$. a är konduktiviteten.
b) Ekvationen $q = -au'$ uttrycker att värmeflödet är proportionellt mot temperaturfallet per längdenhet, med en proportionalitetskonstant a som beror på det värmeledande mediet ifråga. Ekvationen för $\dot{u}$ erhålles genom att betrakta ett godtyckligt intervall (a, b) i vilket tillförd värme per tidsenhet $= \int_a^b f\,dx + q(a,t) - q(b,t) = \int_a^b f\,dx - \int_a^b q'\,dx$ måste vara lika med accumulerad värme per tidsenhet $= \frac{d}{dt}\int_a^b u\,dx = \int_a^b \dot{u}\,dx$. Eftersom intervallet var godtyckligt måste gälla att $\dot{u} = f - q'$ för alla $0 < x < 1$.
c) Betraktar ett fall med två rumsdimensioner med koordinater x, y. Värmeflödet ges nu av $q = -a\nabla u = -a(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ och motsvarande randvillkor övergår i $q \cdot n = 0$, där n är en given normalvektor till randen för det aktuella området. Själva värmeledningsekvationen blir $\dot{u} = f - \frac{\partial}{\partial x}(a\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(a\frac{\partial u}{\partial y})$ kortare skrivet som $\dot{u} = f - \nabla \cdot (a\nabla u)$.

2. Betraktar cG1cG1 metoden med tidssteg k och rumssteg h. Vektorn U_n med rumsnodvärdena i den styckvis linjära lösningen vid tiden $t_n = nk$ ges av ekvationssystemet $(M + \frac{k}{2}S)U_n = (M - \frac{k}{2}S)U_{n-1} + kb$ där M är massmatrisen med diagonalelement $2h/3$ (med undantag av det sista som är $h/3$ pga Neumanrandvillkoret), sub- och superdiagonalelement $h/6$, nollor för övrigt, och b är lastvektorn med element h (utom det sista $h/2$), som vanligt. Styvhetsmatrisen S har nu diagonalelement $\int a\phi_i'\phi_i' = \frac{2}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a = \frac{2}{h}a(x_i) = 2(1 + x_i)/h$ (utom det sista $(1 + x_m - h/2)/h$), subdiagonalelement $\int a\phi_i'\phi_{i+1}' = -\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} a = -\frac{1}{h}(1 + (i + 0.5)h)$ osv.

3. a) Multiplicerar ekv för u med u och integrerar i x-led:

$$0 = \int_0^1 fu = \int_0^1 (\dot{u} - (au')')u = \int_0^1 \dot{u}u + \int_0^1 au'u' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 + \int_0^1 a(u')^2,$$

vilket är den sökta identiteten.
b) Identiteten i a) och olikheten $\|u\| \le \|u'\|$ ger $\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u\|^2 \le 0$, dvs $\frac{d}{dt}(\|u\|^2 e^{2t}) = (\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u\|^2)e^{2t} \le 0$. Integration i t-led från 0 till t ger $\|u\|^2 e^{2t} - \|u_0\|^2 \le 0$, dvs $\|u\|^2 \le e^{-2t}\|u_0\|$, varefter rotdragning ger den sökta

olikheten.
c) Sätter $w = u - u_s$ och konstaterar att $\dot{w} - (aw')' = \dot{u} - (au')' + (au_s')' = f - f = 0$, eftersom $\dot{u}_s = 0$. Kan alltså tillämpa b) på w vilket ger $\|u - u_s\| \le e^{-t}\|u_0 - u_s\| \to 0$ då $t \to \infty$ vsv.

4. a) Utvidgar u_0 och v_0 udda, dvs sätter $\tilde{u}_0(x) = -u_0(-x)$ för $x < 0$, $\tilde{u}(x) = u(x)$ för $x > 0$, analogt för v. d'Alemberts formel ger nu lösningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\tilde{u}_0(x-ct) + \tilde{u}_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{v}_0(s)\,ds$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\,ds, & \text{för } x > ct, \\ \frac{1}{2}\{-u_0(ct-x) + u_0(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} v_0(s)\,ds, & \text{för } x < ct. \end{cases}$$

Finner speciellt att $u(0,t) = \frac{1}{2}\{-u_0(ct) + u_0(ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{ct}^{ct} v_0(s)\,ds = 0$ som önskat.
b) Ansätter (för $x < ct$) modifierad lösning $w(x,t) = u(x,t) + \phi(x - ct)$, vilken vi vet löser ekvationen $\ddot{w} = c^2 w''$. Söker nu ϕ så att $w(0,t) = u(0,t) + \phi(-ct) = g(t)$, dvs $\phi(-ct) = g(t)$, dvs $\phi(s) = g(-s/c)$. Lösningen modifieras alltså för $x < ct$ till $u(x,t) + g(t - x/c)$.

5. Multiplicerar ekvationen för $u = u_s$ med v sådan att $v(0) = 0$ och erhåller $\int_0^1 fv = \int_0^1 (-au')'v = \int_0^1 au'v'$ (inga randtermer pga randvillkoren på u och v. Om vi nu sätter $F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 au'u' - \int_0^1 fu$ så gäller

$$F(u+v) = \frac{1}{2}\int a(u+v)'(u+v)' - \int f(u+v)$$

$$= \frac{1}{2}\int au'u' + \int au'v' + \frac{1}{2}\int av'v' - \int fu - \int fv = F(u) + \frac{1}{2}\int av'v' \ge F(u),$$

dvs u minimerar F bland alla funktioner av typen $u + v$ sådana att $v(0) = 0$, dvs i rummet $V = \{w : w(0) = 0\}$.