Partiella differentialekvationer F2, tentamen 980526
Telefonjour/rond: Magnus Oskarsson, tel. 5305.
Hjälpmedel: Beta (formelsamling), typgodkänd miniräknare/kalkylator.
==

Som vanligt betecknar u' x-derivatan och $\dot{u}$ t-derivatan av $u(x,t)$, och $\|\cdot\|$ betecknar L_2-norm över aktuellt område i rumsled. Uppgifterna är värda 10 poäng vardera. Välj 5 av de 6! Lycka till !!

1. Betrakta problemet $\ddot{u} - u'' = 0$ för $x \in R$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ och $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ för $x \in R$.
Bestäm/plotta $u(x,2)$, dvs lösningen vid tiden $t = 2$, om
a) $u_0(x) = 1$ för $x < 0$, $u_0(x) = 0$ för $x > 0$ och $v_0 = 0$.
b) $u_0 = 0$, $v_0(x) = -1$ för $-1 < x < 0$, $v_0(x) = 1$ för $0 < x < 1$ och $v_0(x) = 0$ för $|x| > 1$.
c) Ange/plotta begynnelsevärden $u_0(x)$ för vilka $u(x,2) = 1$ för $-1 < x < 1$ och $u(x,2) = 0$ annars, om $v_0 = 0$.

2. Betrakta problemet $\dot{u} - u'' = f$ för $0 < x < 1$, $t > 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ för $0 < x < 1$ och $u(0,t) = 0$ och $u'(1,t) = 0$ för $t > 0$.
Visa genom att multiplicera ekvationen för u med u resp $\dot{u}$ att
a) $\|u(\cdot,t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|\,ds$ b) $\|u'(\cdot,t)\|^2 \leq \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2\,ds$.
c) Ge en fysikalisk tolkning av problemet i fallet $f = 20 - u$, dvs av ekvationen $\dot{u} - u'' + u = 20$ och de angivna randvillkoren.

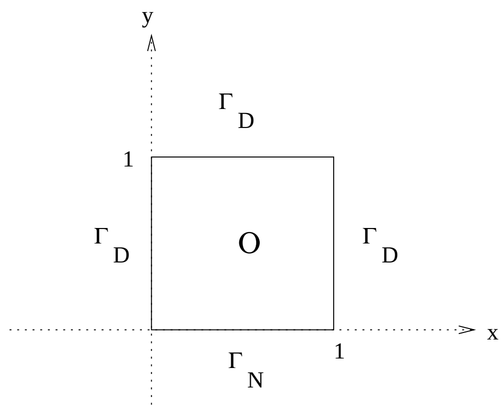
3. Formulera cG1cG1 metoden för problemet i uppgift 2 med $f = 20 - u$ som i 2c. Redovisningen skall leda fram till ett ekvationssystem för beräkning av tidsutvecklingen av lösningen. Det skall framgå hur detta kommit till och är definierat, men detaljerna i uträkningen av koefficienterna kan utelämnas.

4. Låt Ω vara ett begränsat område i planet med rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (som i fig) och betrakta problemet $\Delta u = 0$ i Ω, $u = 0$ på Γ_D, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ på Γ_N.
a) Visa att för en standard Galerkin approximation $U \in V_h$ av u gäller

$$\|\nabla(u - U)\| \leq \|\nabla(u - v)\|$$

för alla $v \in V_h$.
b) Vilken uppskattning gäller för $\|\nabla(u - v)\|$ om $v \in V_h$ är den styckvis linjära interpolanten av u?
c) Härled motsvarande endimensionella interpolationsfeluppskattning.

5. Låt u och U vara som i uppgift 4.
a) Vilken (a priori) uppskattning gäller för $\|u - U\|$? Gäller denna för alla typer av plana områden Ω?
b) Uppskattningen för $\|u-U\|$ bygger bl.a. på att för φ sådana att $\varphi = 0$ på Γ_D, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ på Γ_N, gäller $\|D^2\varphi\| \leq C\|\Delta\varphi\|$, där $D^2\varphi = (\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)^{\frac{1}{2}}$. Visa att för Ω och $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ som i figur gäller $\|\Delta\varphi\| = \|D^2\varphi\|$.



6. a) Visa att lösningen u till problemet i uppg. 4 minimerar (energin) $F(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \int_{\Gamma_N} g\, v$, och att minimum ges av $F(u) = -\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$. Tips: Sätt $w = v - u$ och visa att $F(v) = F(u + w) = F(u) + ... \geq F(u)$.
b) Visa för motsvarande diskreta energiminimum att

$$F(U) = F(u) + \frac{1}{2}\|\nabla(u - U)\|^2.$$

Tips: $\|\nabla(u - U)\|^2 = \int_\Omega \nabla(u - U) \cdot \nabla(u + U) = \|\nabla u\|^2 - \|\nabla U\|^2$. Varför?.

Partiella differentialekvationer F2, 980526
Lösningsförslag

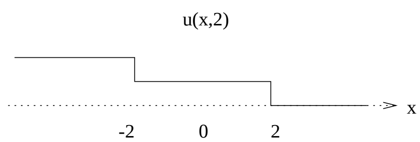
==

1. Utgår från d'Alemberts formel

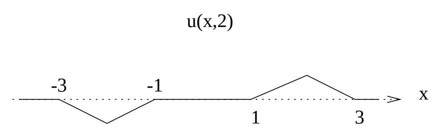
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{u_0(x-t) + u_0(x+t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\,ds.$$

a) Finner att $u(x,2) = 1$ för $x < -2$, $u(x,2) = \frac{1}{2}$ för $-2 < x < 2$ och $u(x,2) = 0$ för $x > 2$, se figur
b) Finner att $u(x,2) = \frac{1}{2}(-x-3)$ för $-3 < x < -2$, $u(x,2) = \frac{1}{2}(x+1)$ för $-2 < x < -1$, $u(x,2) = \frac{1}{2}(x-1)$ för $1 < x < 2$, $u(x,2) = \frac{1}{2}(3-x)$ för $2 < x < 3$, $u(x,2) = 0$ för övrigt, se figur

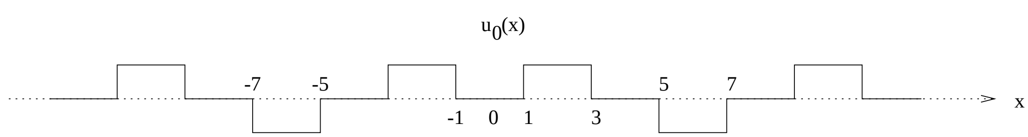
a)



b)



c) *En* lösning (finns fler) skulle kunna vara $u_0(x) = 1$ för $1+8n < x < 3+8n$ och $-(3+8n) < x < -(1+8n)$, $u_0(x) = -1$ för $5+8n < x < 7+8n$ och $-(7+8n) < x < -(5+8n)$, $n = 0,1,2,..$, $u_0(x) = 0$ för övrigt, se figur



2. a) Multiplikation med u och integration $\int_0^1 \, dx$ ger, efter partiell integration:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|u'\|^2 = \int_0^1 f\,u \leq \|f\|\,\|u\|$$

dvs

$$\|u\|\frac{d}{dt}\|u\| \leq \|f\|\,\|u\|, \qquad \text{eller} \qquad \frac{d}{dt}\|u\| \leq \|f\|,$$

vilket efter integration i t-led ger den sökta olikheten.
b) Multiplikation med $\dot{u}$ och integration $\int_0^1 \, dx$ ger

$$\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2 = \int_0^1 f\,\dot{u} \leq \|f\|\,\|\dot{u}\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2,$$

dvs

$$\frac{d}{dt}\|u'\|^2 \leq \|f\|^2,$$

som efter integration i t-led ger den sökta olikheten.
c) Ekvationen kan tänkas uttrycka energibalans; temperaturökningen per tidsenhet $\dot{u}$ i en given punkt är lika med värmetillflödet $-(-u')' = u''$ plus värmeproduktionen, här given som $20 - u$. Tempen är given $= 0$ vid $x = 0$ och värmeflödet är givet $= 0$ vid $x = 1$.
3. Metoden bygger på att

$$\int_a^b \int_0^1 \dot{u}\,v\,dx\,dt + \int_a^b \int_0^1 (u'\,v' + u\,v)\,dx\,dt = \int_a^b 20\,v\,dx\,dt,$$

för v sådana att $v(0,t) = 0$. Ansätter för $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ en approximativ lösning

$$U(x,t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t),$$
$$U_n(x) = \sum_{j=1}^{m} U_{n,j}\phi_j(x),$$

där ψ_n och ϕ_j är de kontinuerliga styckvis linjära hattfunktionerna i t- resp x-led som är $= 1$ i noden t_n resp $x_j = j/m$ och $= 0$ i övriga noder. Söker sedan $U_{n,j}$ sådana att

$$\int_{I_n} \int_0^1 \dot{U}\,\phi_i\,dx\,dt + \int_{I_n} \int_0^1 (U'\,\phi_i' + U\,\phi_i)\,dx\,dt = \int_{I_n} \int_0^1 20\,\phi_i\,dx\,dt,$$

dvs vektorn $U_n = \{U_{n,j}\}$ sådan att

$$MU_n - MU_{n-1} + \frac{k}{2}S(U_n + U_{n-1}) + \frac{k}{2}M(U_n + U_{n-1}) = B,$$

dvs $(M+\frac{k}{2}S+\frac{k}{2}M)U_n = (M-\frac{k}{2}S-\frac{k}{2}M)U_{n-1}+B$, där M är den tridiagonala massmatrisen med element $2h/3$ på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir $h/3$ motsvarande en halv hatt, samt element $h/6$ på sub- och superdiagonalerna, och där styvhetsmatrisen S har element $2/h$ på diagonalen, med undantag av det sista diagonalelementet som blir $1/h$, samt element $-1/h$ på sub- och superdiagonalerna. Vektorn B har elementen $B_i = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^1 20\phi_i\,dx\,dt = 20kh$ resp $B_m = 10kh$, där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ och $h = 1/m$ är rumssteget.

4. a) Variationsformuleringen av problemet blir

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v = \int_{\Gamma_N} g\,v,$$

för alla v sådana att $v = 0$ på Γ_D. Subtraherar motsvarande relation för U och $v \in V_h$ och erhåller felekvationen

$$\int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla v = 0,$$

för alla $v \in V_h$. Får nu

$$\|\nabla(u-U)\|^2 = \int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla(u-U) = \int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla(u-v)$$
$$\le \|\nabla(u-U)\|\,\|\nabla(u-v)\|,$$

för alla $v \in V_h$, varav den sökta olikheten följer.
b) Har att $\|\nabla(u-v)\| \le C\|hD^2u\|$.
c) Visar $\|(u-v)'\| \le \|hu''\|$. På delintervall i gäller $(u-v)'(x) = \int_{\xi_i}^x (u-v)'' = \int_{\xi_i}^x u''$, för någon punkt ξ_i i intervallet, enligt medelvärdessatsen. Det följer att

$$|(u-v)'(x)| \le \int_{I_i} |u''| \le (\int_{I_i})^{\frac{1}{2}}(\int_{I_i} u''^2)^{\frac{1}{2}} = h_i^{\frac{1}{2}}(\int_{I_i} u''^2)^{\frac{1}{2}},$$

dvs

$$\int_{I_i} (u'-v')^2 \le h_i^2 \int_{I_i} u''^2.$$

Summation över i ger

$$\|(u-v)'\|^2 \leq \|hu''\|^2,$$

vilket ger den sökta olikheten.
5. a) För $u-U$ gäller $\|u-U\| \leq \|h^2 D^2 u\|$, eller åtminstone $\|u-U\| \leq C \max_\Omega h \|hD^2 u\|$.
b) Partiell integration först i x-led, med utnyttjande av att $u_{yy}=0$ för $x=0$ och $x=1$, $0<y<1$, och sedan i y-led, med utnyttjande av att $u_x=0$ för $y=1$ och $u_{xy}=u_{yx}=-\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial n}=0$ för $y=0$, $0<x<1$, ger

$$\int_\Omega u_{xx}u_{yy} = -\int_\Omega u_x u_{yyx} = -\int_\Omega u_x u_{xyy} = \int_\Omega u_{xy}u_{xy}.$$

Härav följer att $\|\Delta u\|^2 = \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xx}u_{yy} + u_{yy}^2) = \int_\Omega (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) = \|D^2 u\|^2$, vsv.

6. a) Sätter $w=v-u$ och finner att

$$F(v) = F(u+w) = F(u) + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\Gamma_N} g\, w + \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2 \geq F(u),$$

ty $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\Gamma_N} g\, w = 0$.
Finner vidare, genom att ta $w=u$ i den sista likheten, att $F(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_{\Gamma_N} g\, u = -\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$.
b) Analogt gäller $F(U) = -\frac{1}{2}\|\nabla U\|^2$, vilket mha konjugatregeln och felekvationen ger

$$F(U) - F(u) = \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 - \|\nabla U\|^2) = \frac{1}{2}(\int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla(u+U)$$

$$= \int_\Omega \nabla(u-U)\cdot\nabla(u-U) = \frac{1}{2}\|\nabla(u-U)\|^2.$$

vsv.