PDETK

Pris 10 kr

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

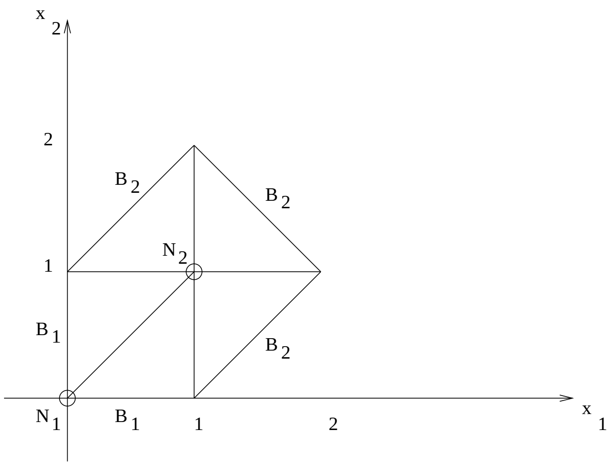
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna
Telefon: Anders Logg, 0740–459022
2003–04–22 kl. 8.45-13.45

TMA372/MAN660 Partiella differentialekvationer TM, IMP, E3, GU

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Let Ω be the triangulated domain below. Compute the cG(1) solution of $-\Delta u = 0$ in Ω with the Neumann data: $\partial_n u = 3$ on B_1 and Dirichlet condition: $u = 0$ on B_2.



2. Consider the one-dimensional heat equation:

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \quad t > 0. \end{cases}$$

a) Using appropriate variational forms show the stability estimates:
$\|u(\cdot,t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|\,ds$, and $\|u_x(\cdot,t)\|^2 \le \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2\,ds$.
b. Give physical meaning to the equation when f=9-u.

3. Let a be a positive constant. Consider the boundary value problem (BVP)

$$-u''(x) + au(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Formulate the corresponding variational formulation (VF), and the minimization problem (MP) and prove that $(BVP) \iff (VF) \iff (MP)$.

4. Prove an a priori and an a posteriori error estimate (in the H^1-norm: $\|u\|_{H^1}^2 = \|u'\|^2 + \|u\|^2$) for a finite element method for the problem

$$-u'' + 2xu' + 2u = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

5. Consider the boundary value problem

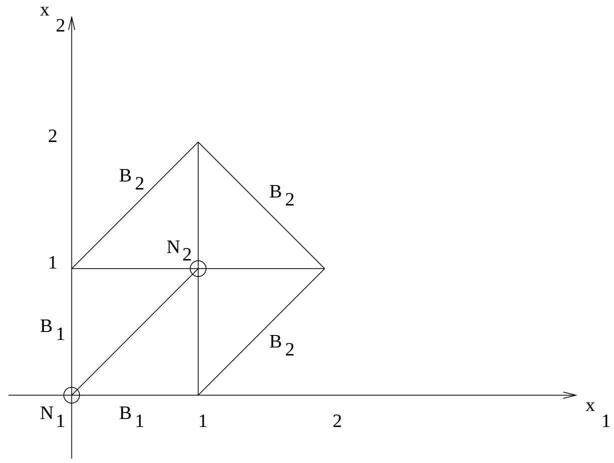
$$-div(\varepsilon\nabla u + \beta u) = f, \text{ in } \Omega, \quad u = 0, \text{ on } \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded polygonal donmain in $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ is a constant, $\beta = (\beta_1(x), \beta_2(x))$, and $f = f(x)$. Give the conditions (based on Lax-Milgrams theorem) for existence of a unique solution for this problem. Derive stability estimates for u i terms of $||f||_{L_2(\Omega)}$, ε and $diam(\Omega)$.

MA

TMA371/MAN660 Partial Differential Equations TM, IMP, E3, GU
2003-04-22. Solutions

1. Let Ω be the triangulated domain below. Compute the cG(1) solution of $-\Delta u = 0$ in Ω with the Neumann data: $\partial_n u = 3$ on B_1 and Dirichlet condition: $u = 0$ on B_2.



Solution.
<u>Variational Formulation:</u> Using Green's formula we have that

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega -\Delta u v\, dx = \{\text{Green's}\} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_n u) v \\
&= \{\Gamma := \partial\Omega := B_1 \cup B_2\} = \{v = 0 \text{ on } B_2, \text{ and } \partial_n u = 3 \text{ on } B_1\} \qquad (1)\\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{B_1} 3v\, ds
\end{aligned}
$$

Thus we have the <u>finite element formulation</u>: Find piecewise linear function $U \in V_h$ such that

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla v = \int_{B_1} 3v\, ds, \quad \forall v \in V_h. \tag{2}$$

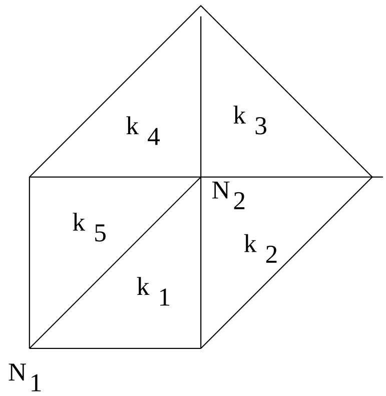
Let now

$$U(x) = U_1 \varphi_1(x) + U_2 \varphi_2(x), \tag{3}$$

where φ_i are the piecewise linears basis functions for the above discretization of Ω with $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2$. We insert (3) in (2) and let $v = \varphi_i,\ i = 1, 2$ to obtain a 2×2 system viz,

$$
\begin{cases}
\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1\, dx\, U_1 + \int_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1\, dx\, U_2 = 3\int_{B_1} \varphi_1\, ds, \\
\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\, dx\, U_1 + \int_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2\, dx\, U_2 = 3\int_{B_1} \varphi_2\, ds.
\end{cases} \tag{4}
$$

Note that using the orientation in the figur below we have



$$
\begin{array}{ll}
\nabla\varphi_1\Big|_{k_1} = (-1,0) & \nabla\varphi_2\Big|_{k_1} = (0,1) \\
\nabla\varphi_1\Big|_{k_2} = (0,0) & \nabla\varphi_2\Big|_{k_2} = (-1,1) \\
\nabla\varphi_1\Big|_{k_3} = (0,0) & \nabla\varphi_2\Big|_{k_3} = (-1,-1) \\
\nabla\varphi_1\Big|_{k_4} = (0,0) & \nabla\varphi_2\Big|_{k_4} = (1,-1) \\
\nabla\varphi_1\Big|_{k_5} = (0,-1) & \nabla\varphi_2\Big|_{k_5} = (1,0)
\end{array}
$$

Thus

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\, dx = \int_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1\, dx = 0,$$

and

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1\, dx =& \sum_{i=1}^{5} |k_i| \Big(\nabla\varphi_1|_{k_i} \cdot \nabla\varphi_1|_{k_i} \Big) \\
& \frac{1}{2} \times (-1,0)\cdot(-1,0) + \frac{1}{2} \times (0,-1)\cdot(0,-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

Similarly

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2\, dx =& \sum_{i=1}^{5} |k_i| \Big(\nabla\varphi_2|_{k_i} \cdot \nabla\varphi_2|_{k_i} \Big) = \frac{1}{2} \times \Big((0,1)\cdot(0,1) \\
+(-1,1)\cdot(-1,1) + &(-1,-1)\cdot(-1,-1) + (1,-1)\cdot(1,-1) + (1,0)\cdot(1,0)\Big) \\
&= \frac{1}{2} \times \Big(1+2+2+2+1\Big) = 4.
\end{aligned}
$$

As for the right hand side we have

$$3\int_{B_1} \varphi_1 = 3 \times \text{aread of the side alonge } B_1 = 3\Big(1/2 + 1/2\Big) = 3,$$

while

$$3\int_{B_1} \varphi_2 = 0.$$

Summing up we have a trivial situation as follows:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thus $U(x) = 3\varphi_1(x)$ and actually, with this configuration, we have a trivial one-dimensional problem.
<u>Alternatively:</u> We may include $N_3 = (1,0)$ and $N_4 = (0,1)$ as new nodes and extend the triangles with Neumann outer boundarys to include k_2 and k_4. This would lead to a 4×4 system which we are not considering here!

2. Consider the one-dimensional heat equation:

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \quad t > 0. \end{cases}$$

a) Using appropriate variational forms show the stability estimates:
$\|u(\cdot,t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|\,ds$, and $\|u_x(\cdot,t)\|^2 \le \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2\,ds$.
b. Give physical meaning to the equation when f=9-u.

Solution: a) Multiply the equation by u and integrate over $(0,1)$ to get

$$\int_0^1 \dot{u}u\,dx - \int_0^1 u''u\,dx = \int_0^1 fu\,dx.$$

Integrating by parts and using the boundary conditions we have

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\,dx + \int_0^1 \left(u'\right)^2 dx - u'(1,t)u(1,t) + u'(0,t)u(0,t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2 + ||u'||^2$$
$$= ||u||\frac{d}{dt}||u|| + ||u'||^2 = \int_0^1 fu\,dx \le ||f||\,||u||.$$

Consequently

$$\frac{d}{dt}||u|| \le ||f||,$$

which integrating over time:

$$\int_0^t ||f||\,ds \ge ||u(\cdot,t)|| - ||u_0||,$$

gives the first estimate in a).

Toderive the second estimate we multiply the equation by $\dot{u}$ and integrate over $(0,1)$ to obtain:

$$\int_0^1 \left(\dot{u}\right)^2 dx - \int_0^1 u''\dot{u}\,dx = ||\dot{u}|| + \int_0^1 u'\dot{u}'\,dx - u'(1,t)\dot{u}(1,t) + u'(0,t)\dot{u}(0,t)$$
$$= ||\dot{u}||^2 + \frac{d}{dt}||u'||^2 = \int_0^1 f\dot{u}\,dx \le ||f||\,||\dot{u}|| \le \frac{1}{2}\Big(||f||^2 + ||\dot{u}||^2\Big).$$

Thus

$$\frac{1}{2}||\dot{u}||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'||^2 \le \frac{1}{2}||f||^2,$$

and hence

$$\frac{d}{dt}||u'||^2 \le ||f||^2,$$

which, as in the first estimate, integrating over time: $\int_0^t \quad ds$ gives the second estimate.

b) Heat conduction with

$u(x,t) =$	temperature at x at time t.
$u(x,0) = u_0(x),$	the initial temperature at $t = 0$.
$u(0,t) = 0,$	fixed temperatue at $x = 0$.
$u'(1,t) = 0,$	isolated at $x = 1$, (no heat flux).
$f = 9 - u,$	heat source, in this case a contril system to force $u \to 9$.

3. Let a be a positive constant. Consider the boundary value problem (BVP)

$$-u''(x) + au(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Formulate the corresponding variational formulation (VF), and the minimization problem (MP) and prove that $(BVP) \Longleftrightarrow (VF) \Longleftrightarrow (MP)$.

Solution: See lecture notes, Chapter 8.

4. Prove an a priori and an a posteriori error estimate (in the H^1-norm: $\|u\|_{H^1}^2 = \|u'\|^2 + \|u\|^2$) for a finite element method for the problem

$$-u'' + 2xu' + 2u = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Solution: We multiply the differential equation by a test function $v \in H_0^1(I),\ I = (0,1)$ and integrate over I. Using partial integration and the boundary conditions we get the following *variational problem*: Find $u \in H_0^1(I)$ such that

$$\int_I (u'v' + 2xu'v + 2uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{5}$$

A *Finite Element Method* with $cG(1)$ reads as followa: Find $U \in V_h^0$ such that

$$\int_I (U'v' + 2xU'v + 2Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{6}$$

where

$V_h^0 = \{v : v \text{ is piecewise linear and continuous in a partition of } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$

Now let $e = u - U$, then (1)-(2) gives that

$$\int_I (e'v' + 2xe'v + 2ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0. \tag{7}$$

A posteriori error estimate: We note that using $e(0) = e(1) = 0$, we get

$$\int_I 2xe'e = \int_I x\frac{d}{dx}(e^2) = (xe^2)|_0^1 - \int_I e^2 = -\int_I e^2, \tag{8}$$

so that

$$
\begin{aligned}
\|e\|_{H^1}^2 &= \int_I (e'e' + ee) = \int_I (e'e' + 2xe'e + 2ee) \\
&= \int_I ((u-U)'e' + 2x(u-U)'e + 2(u-U)e) = \{v = e \text{ in}(1)\} \\
&= \int_I fe - \int_I (U'e' + 2xU'e + 2Ue) = \{v = \pi_h e \text{ in}(2)\} \qquad (9)\\
&= \int_I f(e - \pi_h e) - \int_I \Big(U'(e-\pi_h e)' + 2xU'(e - \pi_h e) + 2U(e - \pi_h e)\Big) \\
&= \{P.I. \text{ on each subinterval}\} = \int_I \mathcal{R}(U)(e - \pi_h e),
\end{aligned}
$$

where $\mathcal{R}(U) := f + U'' - 2xU' - 2U = f - 2xU' - 2U$, (for approximation with picewise linears, $U \equiv 0$, on each subinterval). Thus (5) implies that

$$
\begin{aligned}
\|e\|_{H^1}^2 &\le \|h\mathcal{R}(U)\| \|h^{-1}(e - \pi_h e)\| \\
&\le C_i \|h\mathcal{R}(U)\| \|e'\| \le C_i \|h\mathcal{R}(U)\| \|e\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

where C_i is an interpolation constant, and hence we have with $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(I)}$ that

$$\|e\|_{H^1} \le C_i \|h\mathcal{R}(U)\|.$$

A priori error estimate: We use (4) and write

$$
\begin{aligned}
\|e\|_{H^1}^2 &= \int_I (e'e' + ee) = \int_I (e'e' + 2xe'e + 2ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + 2xe'(u-U) + 2e(u-U)\Big) = \{v = U - \pi_h u \text{ in}(3)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + 2xe'(u - \pi_h u) + 2e(u - \pi_h u)\Big) \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\| \|e'\| + 2\|u - \pi_h u\| \|e'\| + 2\|u - \pi_h u\| \|e\| \\
&\le \{\|(u - \pi_h u)'\| + 4\|u - \pi_h u\|\} \|e\|_{H^1} \\
&\le C_i \{\|hu''\| + \|h^2 u''\|\} \|e\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

this gives that

$$\|e\|_{H^1} \le C_i \{\|hu''\| + \|h^2 u''\|\},$$

which is the a priori error estimate.

5. Consider the boundary value problem

$$-div(\varepsilon \nabla u + \beta u) = f, \text{ in } \Omega, \quad u = 0, \text{ on } \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded polygonal donmain in $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ is a constant, $\beta = (\beta_1(x), \beta_2(x))$, and $f = f(x)$. Give the conditions (based on Lax-Milgrams theorem) for existence of a unique solution for this problem. Derive stability estimates for u i terms of $\|f\|_{L_2(\Omega)}$, ε and $diam(\Omega)$.

Solution: Consider

$$-div(\varepsilon \nabla u + \beta u) = f, \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ on } \Gamma = \partial\Omega. \qquad (10)$$

a) Multiply the equation (6) by $v \in H_0^1(\Omega)$ and integrate over Ω to obtain the Green's formula

$$-\int_\Omega div(\varepsilon\nabla u + \beta u)v\,dx = \int_\Omega (\varepsilon\nabla u + \beta u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Variational formulation for (6) is as follows: Find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{11}$$

where

$$a(u,v) = \int_\Omega (\varepsilon\nabla u + \beta u)\cdot\nabla v\,dx,$$

and

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

According to the Lax-Milgram's theorem, for a unique solution for (7) we need to verify that the following relations are valid:

i)

$$|a(v,w)| \le \gamma\|u\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v,\ w \in H_0^1(\Omega),$$

ii)

$$a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

iii)

$$|L(v)| \le \Lambda\|v\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

for some $\gamma,\ \alpha,\ \Lambda > 0$.

Now since

$$|L(v)| = |\int_\Omega fv\,dx| \le \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \le \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

thus iii) follows with $\Lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$.

Further we have that

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\le \int_\Omega |\varepsilon\nabla v + \beta v||\nabla w|\,dx \le \int_\Omega (\varepsilon|\nabla v| + |\beta||v|)|\nabla w|\,dx\\
&\le \Big(\int_\Omega (\varepsilon|\nabla v| + |\beta||v|)^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\Big)^{1/2}\\
&\le \sqrt{2}\max(\varepsilon, \|\beta\|_\infty)\Big(\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2)\,dx\Big)^{1/2}\|w\|_{H^1(\Omega)}\\
&= \gamma\|v\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

which, with $\gamma = \sqrt{2}\max(\varepsilon, \|\beta\|_\infty)$, gives i).

Finally, if $div\beta \le 0$, then

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \Big(\varepsilon|\nabla v|^2 + (\beta\cdot\nabla v)v\Big)\,dx = \int_\Omega \Big(\varepsilon|\nabla v|^2 + (\beta_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta_2\frac{\partial v}{\partial x_2})v\Big)\,dx\\
&= \int_\Omega \Big(\varepsilon|\nabla v|^2 + \frac{1}{2}(\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}(v)^2 + \beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}(v)^2)\Big)\,dx = \text{Green's formula}\\
&= \int_\Omega \Big(\varepsilon|\nabla v|^2 - \frac{1}{2}(div\beta)v^2\Big)\,dx \ge \int_\Omega \varepsilon|\nabla v|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Now by the Poincare's inequality

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \ge C\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2)\,dx = C\|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

for some constant $C = C(diam(\Omega))$, we have

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad \text{with } \alpha = C\varepsilon,$$

thus ii) is valid under the *condition that* $div\beta \leq 0$.
From ii), (7) (with $v = u$) and iii) we get that

$$\alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) = L(u) \leq \Lambda \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

which gives the *stability estimate*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Lambda}{\alpha},$$

with $\Lambda = \|f\|_{L_2(\Omega)}$ and $\alpha = C\varepsilon$ defiened above.

MA

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

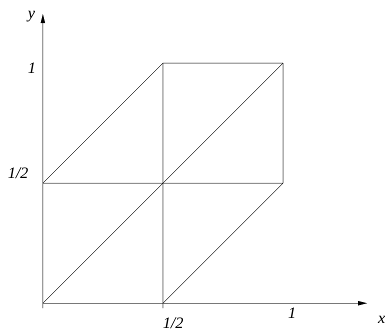
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna
Telefon: Anton Evgrafov, 0740–459022
2002–12–17 kl. 14.15-19.15

TMA372/MAN660 Partiella differentialekvationer TM, IMP, E3, GU

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

1. Let Ω be the triangulated domain below. Compute the cG(1) solution of

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{on } \Omega \\ u_x(1,y) = 0, \;\; 1/2 \le y \le 1, & u(x,y) = 0, \quad \text{on the rest of boundary.} \end{cases}$$



2. Consider the initial value problem $\dot{u}(t) + a(t)u(t) = f(t)$, for $0 < t < T$, and $u(0) = u_0$. Prove the stability estimates

$$|u(t)| \le e^{-\alpha t}|u_0| + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \max_{0 \le s \le t} |f(s)|, \quad a(t) \ge \alpha > 0, \quad \text{and}$$

$$|u(t)| \le |u_0| + \int_0^t |f(s)|\, ds, \quad a(t) \ge 0.$$

3. Prove that if $u = 0$ on the boundary of the unit square Ω, then

$$\Big(\int_\Omega |u|^2\, dx\Big)^{1/2} \le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

4. Prove an a priori and an a posteriori error estimate (in the energy norm: $\|u\|_E^2 := \|u'\|^2 + \|u\|^2$) for the cG(1) finite element method for the problem

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' + u = f, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

where $\alpha \ge 0$. For which value of α is the a priori error estimate optimal?

5. Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in a bounded domain } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \; d = 2, 3. \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Prove the L_2 stability estimate

$$||\nabla u||_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u||_{L_2(\Gamma)} \le \frac{1}{2}||g||_{L_2(\Gamma)}.$$

b) Verify the conditions on Riesz/Lax-Milgram theorems for this problem.

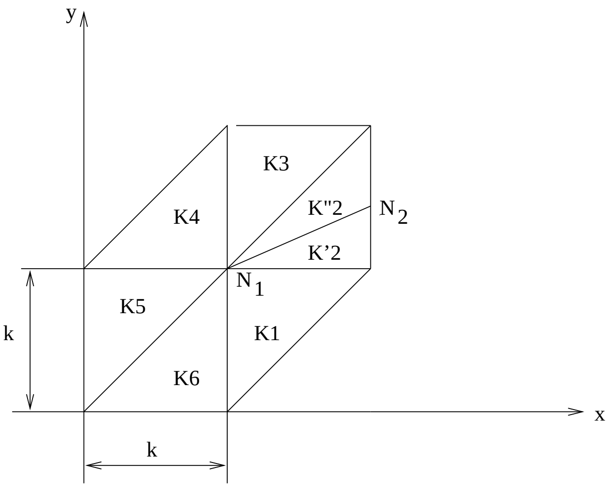
MA

TMA371/MAN660 Partial Differential Equations TM, IMP, E3, GU
2002-12-17. Solutions

1.

Let Ω be the triangulated domain below. Compute the cG(1) solution of

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{on } \Omega \\ u_x(1,y) = 0, \ \ 1/2 \le y \le 1, & u(x,y) = 0, \quad \text{on the rest of boundary.} \end{cases}$$



Solution. We split the boundary $\Gamma := \partial\Omega$ of the domain as $\Gamma = \Gamma_N + \Gamma_D$ with $\Gamma_N = \{(1,y) : 1/2 \le y \le 1\}$ and $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$.

Variational Formulation: Using Green's formula we have that

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1 \cdot v = \int_\Omega -\Delta u v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma (\partial_n u) v \\ = \{v = 0 \text{ on } \Gamma_D, \text{ and } \partial_n u = u_x = 0 \text{ on } \Gamma_N\} \\ = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \end{aligned} \tag{1}$$

Thus we have the finite element formulation: Find piecewise linear function $U \in V_h$ such that

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla v = \int_\Omega 1 \cdot v, \quad \forall v \in V_h. \tag{2}$$

Remark. It is natural to think $P_1 = (1/2, 1/2)$, $P_2 = (1, 1/2)$ and $P_3 = (1,1)$ as nodes. Then there are two possibilities:

(I) Normally we let the basis functions ψ_2, and ψ_3 (corresponding to the nodes P_2 and P_3, respectively) to have $K_1 \cap K_2$, and $K_2 \cap K_3$ as their supports, respectively. This however extends the Neumann boundary codition from Γ_N to $\Gamma_N \cap \{(x,y) : y = x - 1/2, \ 1/2 \le x \le 1\} \cup \{(x,y) : y = 1, \ 1/2 \le x \le 1\}$, thus removing the Dirichlet condition from the line-segments $\{(x,y) : y = x - 1/2, \ 1/2 \le x \le 1\}$ and $\{(x,y) : y = 1, \ 1/2 \le x \le 1\}$.

(II) To circumvent this difficulty, we restrict the support of both basis functions $\psi_i,\ i=2,3$ to ONLY! K_2. And this choice introduce discontinuities and cannot be considered in cG(1).

Hence summing up, because of cG(1) approximation in this problem we cannot choose the boundary points $(1,1/2)$ and $(1,1)$ as nodes (this will either destroy the continuity or replace the Dirichlet condition on $\{(x,y) : 1/2 \le x \le 1\}$, with $0 \le y \le 1/2$ and $y=1$ by the Neumann condition. So the only adequarte way is the *refinement* of K_2 into two triangles K_2' and K_2'', by letting, e.g. $N_2=(1,3/4)$, as in the figure. We define the test functions $\varphi_i(Nj)=\delta_{ij},\ i,j=1,2$. In order to have zero boundary condition on $\Gamma_D,\ \varphi_2$, has $K_2=K_2'\cap K_2''$ as its support. Let now

$$U(x,y)=U_1\varphi_1(x,y)+U_2\varphi_2(x,y).$$

where $U_i=U(N_i),\ i=1,2$. Observe that φ_is are the bases functions for V_h and thus the equation (2) is equivalent to the following system:

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_i U_1+\int_\Omega \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi_i U_2+=\int_\Omega \varphi_i,\quad i=1,2. \tag{3}$$

Let now $\varphi_2'=\varphi|_{K_2'}$ and $\varphi_2''=\varphi|_{K_2''}$, then using a standard triangle K_2 with vertices $(0,0),\ (k,0)$, and (k,k), for $\varphi_2'(x,y)=ax+by+c$ we have that

$$\begin{aligned}
&\varphi_2'(0,0)=0\Rightarrow c=0,\\
&\varphi_2'(k,0)=0\Rightarrow ak=0\Leftrightarrow a=0,\\
&\varphi_2'(k,k/2)=1\Rightarrow bk/2=1\Leftrightarrow b=2/k.
\end{aligned}$$

Thus $\varphi_2'(x,y)=\frac{2}{k}y$. Similarly for $\varphi_2''(x,y)=ax+by+c$ we have that

$$\begin{aligned}
&\varphi_2''(0,0)=0\Rightarrow c=0,\\
&\varphi_2''(k,k)=0\Rightarrow ak+bk=0\Leftrightarrow b=-a,\\
&\varphi_2''(k,k/2)=1\Rightarrow ak+bk/2=1\Leftrightarrow a=2/k,\ b=-2/k.
\end{aligned}$$

Thus $\varphi_2''(x,y)=\frac{2}{k}x-\frac{2}{k}y$.
Considering in standard triangles we can easily see from the figure that:

$$\begin{array}{lll}
\nabla\varphi_1\Big|_{K_1}=\frac{1}{k}(1,1), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_1}=(0,0), & \\
\nabla\varphi_1\Big|_{K_2}=\frac{1}{k}(-1,0), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_2'}=\frac{1}{k}(0,2), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_2''}=\frac{1}{k}(2,-2),\\
\nabla\varphi_1\Big|_{K_3}=\frac{1}{k}(0,-1), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_3}=(0,0), & \\
\nabla\varphi_1\Big|_{K_4}=\frac{1}{k}(1,-1), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_4}=(0,0), & \\
\nabla\varphi_1\Big|_{K_5}=\frac{1}{k}(1,0), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_5}=(0,0), & \\
\nabla\varphi_1\Big|_{K_6}=\frac{1}{k}(0,1), & \nabla\varphi_2\Big|_{K_6}=(0,0). &
\end{array}$$

Now considering the intersections of the supports of the φ functions we have that:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_1 &= \sum_{j=1}^{6}\int_{K_j}\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_1\\ &= \frac{k^2}{2}\frac{1}{k^2}\Big\{(-1,1)\cdot(-1,1)+(-1,0)\cdot(-1,0)+(0,-1)\cdot(0,-1)\\ &\quad+(1,-1)\cdot(1,-1)+(1,0)\cdot(1,0)+(1,0)\cdot(1,0)\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\{2+1+1+2+1+1\}=4.\end{aligned}$$

Note that $|K'|=|K''|=\frac{1}{2}k\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2}{4}$, thus

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi_2 = \int_{K_2}\nabla\varphi_2\cdot\nabla\varphi_2 &= \int_{K_2'}\nabla\varphi_2'\cdot\nabla\varphi_2' + \int_{K_2''}\nabla\varphi_2''\cdot\nabla\varphi_2''\\ &= \frac{k^2}{4}\frac{1}{k^2}\Big\{(0,2)\cdot(0,2)+(2,-2)\cdot(2,-2)\Big\} = \frac{1}{4}\{4+8\}=3,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 = \int_{K_2}\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2 &= \int_{K_2'}\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2' + \int_{K_2''}\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2''\\ &= \frac{k^2}{4}\frac{1}{k^2}\Big\{(-1,0)\cdot(0,2)+(-1,0)\cdot(2,-2)\Big\} = \frac{1}{4}\{-2\}=-1/2.\end{aligned}$$

As for the right hand side in (3) we have

$$\int_\Omega \varphi_1 = 6\cdot\frac{1}{3}\frac{k^2}{2}=k^2,\qquad \int_\Omega\varphi_2=\int_{K_2}\varphi_2=\cdots=1\cdot\frac{1}{3}\frac{k^2}{2}=k^2/6.$$

Thus recalling that $k=1/2$, we have the folowing system of equations:

$$\begin{pmatrix}4 & -1/2\\ -1/2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/4\\ 1/24\end{pmatrix}\Rightarrow U_1=6U_2-1/12,\ \text{with}\quad U_2=\frac{7}{6(47)}.$$

2. See stability lemma in chapter 9 of the lecture notes.

3. Prove that if $u=0$ on the boundary of the unit square Ω, then

$$\Big(\int_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{1/2}\le\Big(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Solution. We have that

$$\begin{aligned}|u(x)| = |u(x_1,x_2)-u(0,x_2)| &= \Big|\int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2)\,d\bar{x_1}\Big|\\ &= \Big|\int_0^{x_1}1\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2)\,d\bar{x_1}\Big| \le \{\text{Cauchy's inequality}\}\\ &\le \Big(\int_0^{x_1}1^2\,d\bar{x_1}\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^{x_1}(\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2))^2\,d\bar{x_1}\Big)^{1/2}\\ &\le \Big(\int_0^{1}(\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2))^2\,d\bar{x_1}\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

This implies that

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^2\,dx &\le \int_\Omega \Big(\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2))^2\,d\bar{x_1}\Big)\,dx\\
&= \int_0^1\int_0^1 \Big(\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2))^2\,d\bar{x_1}\Big)\,dx_1\,dx_2\\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1}u(\bar{x_1},x_2))^2\,d\bar{x_1}\Big)\,dx_2 = \int_0^1\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1,x_2))^2\,dx_1\,dx_2\\
&= \int_\Omega (\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1,x_2))^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

which gives the desired result:

$$
\Big(\int_\Omega |u|^2\,dx\Big)^{1/2} \le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}.
$$

4. Prove an a priori and an a posteriori error estimate (in the energy norm: $||u||_E^2 := ||u'||^2 + ||u||^2$) for the cG(1) finite element method for the problem

$$
\begin{cases} -u'' + \alpha u' + u = f, & 0 < x < 1,\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}
$$

where $\alpha \ge 0$. For which value of α is the a priori error estimate optimal?

Solution. The Variational formulation:
Multiply the equation by $v \in V$, integrate by parts over $(0,1)$ and use the boundary conditions to obtain

$$
\text{(4)}\qquad \text{Find } u \in V: \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 \alpha u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V.
$$

cG(1):

$$
\text{(5)}\quad \text{Find } U \in V_h: \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 \alpha U'v\,dx + \int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V_h.
$$

From (1)-(2), we find The Galerkin orthogonality:

$$
\text{(6)}\qquad \int_0^1 \Big((u-U)'v' + \alpha(u-U)'v + (u-U)v\Big)\,dx = 0, \quad \forall v \in V_h.
$$

We define the inner product $(\cdot,\cdot)_E$ associated to the energy norm to be

$$
(v,w)_E = \int_0^1 (v'w' + vw)\,dx, \qquad \forall v, w \in V.
$$

Note that

$$
\text{(7)}\qquad \int_0^1 e'e\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(e^2\Big)\,dx = \frac{1}{2}[e^2]_0^1 = 0.
$$

Thus using (7) we have

$$
\text{(8)}\qquad ||e||_E^2 = \int_0^1 (e'e' + ee)\,dx = \int_0^1 (e'e' + \alpha e'e + ee)\,dx.
$$

We split the second factor e as $e = u - U = u - v + v - U$, with $v \in V_h$ and write

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
||e||_E^2 &= \int_0^1 \Big(e'(u-U)' + \alpha e'(u-U) + e(u-U) \Big)\, dx = \Big\{ v \in V_h \Big\} \\
&= \int_0^1 \Big(e'(u-v)' + \alpha e'(u-v) + e(u-v) \Big)\, dx \\
&+ \int_0^1 \Big(e'(v-U)' + \alpha e'(v-U) + e(v-U) \Big)\, dx \\
&= \int_0^1 \Big(e'(u-v)' + \alpha e'(u-v) + e(u-v) \Big)\, dx,
\end{aligned}
$$

where, in the last step, we have used the Galerkin orthogonality to eliminate terms involving U. Now we can write

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
||e||_E^2 &= \int_0^1 \Big(e'(u-v)' + e(u-v) + \alpha e'(u-v) \Big)\, dx \\
&\le ||e||_E \cdot ||u-v||_E + \alpha ||e'||_{L_2} ||u-v||_{L_2} \\
&\le ||e||_E \Big(||u-v||_E + \alpha ||u-v||_{L_2} \Big) \le ||e||_E ||u-v||_E (1+\alpha),
\end{aligned}
$$

and derive the <u>a priori error estimate:</u>

$$
||e||_E \le ||u-v||_E (1+\alpha), \quad \forall v \in V_h.
$$

To obtain <u>a posteriori error estimates</u> the idea is to eliminate u-terms, by using the differential equation, and replacing their contributions by the data f. Then this f combined with the remaining U-terms would yield to the residual error:
<u>A posteriori error estimate:</u>

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
||e||_E^2 &= \int_0^1 (e'e' + ee)\, dx = \int_0^1 (e'e' + \alpha e'e + ee)\, dx \\
&= \int_0^1 (u'e' + \alpha u'e + ue)\, dx - \int_0^1 (U'e' + \alpha U'e + Ue)\, dx.
\end{aligned}
$$

Now using the variational formulation (4) we have that

$$
\int_0^1 (u'e' + \alpha u'e + ue)\, dx = \int_0^1 fe\, dx.
$$

Inserting in (11) and using (5) with $v = \Pi_k e$ we get

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
||e||_E^2 &= \int_0^1 fe\, dx - \int_0^1 (U'e' + \alpha U'e + Ue)\, dx \\
&+ \int_0^1 (U'\Pi_h e' + \alpha U'\Pi_h e + U\Pi_h e)\, dx - \int_0^1 f\Pi_h e\, dx.
\end{aligned}
$$

Thus

$$\begin{aligned}
||e||_E^2 &= \int_0^1 f(e-\Pi_h e)\,dx - \int_0^1 \Big(U'(e-\Pi_h e)' + \alpha U'(e-\Pi_h e) + U(e-\Pi_h e)\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 f(e-\Pi_h e)\,dx - \int_0^1 (\alpha U' + U)(e-\Pi_h e)\,dx - \sum_{j=1}^{M+1}\int_{I_j} U'(e-\Pi_h e)'\,dx \\
&= \{\text{partial integration}\} \\
&= \int_0^1 f(e-\Pi_h e)\,dx - \int_0^1 (\alpha U' + U)(e-\Pi_h e)\,dx + \sum_{j=1}^{M+1}\int_{I_j} U''(e-\Pi_h e)\,dx \\
&= \int_0^1 (f + U'' - \alpha U' - U)(e-\Pi_h e)\,dx = \int_0^1 R(U)(e-\Pi_h e)\,dx \\
&= \int_0^1 hR(U)h^{-1}(e-\Pi_h e)\,dx \le ||hR(U)||_{L_2}||h^{-1}(e-\Pi_h e)||_{L_2} \\
&\le C_i||hR(U)||_{L_2}\cdot||e'||_{L_2} \le ||hR(U)||_{L_2}\cdot||e||_E.
\end{aligned}$$

This gives the <u>a posteriori error estimate:</u>

$$||e||_E \le C_i||hR(U)||_{L_2},$$

with $R(U) = f + U'' - \alpha U' - U = f - \alpha U' - U$ on $(x_{i-1}, x_i),\ \ i = 1, \dots, M+1$.

The a priori error estimate is optimal for $\alpha = 0$.

5. Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in a bounded domain } \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2, 3. \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

a) Prove the L_2 stability estimate

$$||\nabla u||^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}||u||^2_{L_2(\Gamma)} \le \frac{1}{2}||g||^2_{L_2(\Gamma)}.$$

b) Verify the conditions on Riesz/Lax-Milgram theorems for this problem.
Solution: a) Using Greens formula we have that

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = -\int_\Omega (\Delta u)u + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}u = \int_{\partial\Omega}(g-u)u.$$

In other words

$$||\nabla u||^2_{L_2(\Omega)} + ||u||^2_{L_2(\Gamma)} = \int_{\partial\Omega} gu \le ||g||^2_{L_2(\Gamma)}||u||^2_{L_2(\Gamma)} \le \frac{1}{2}||g||^2_{L_2(\Gamma)} + \frac{1}{2}||u||^2_{L_2(\Gamma)},$$

which gives the desired estimate.
To show the Riesz/Lax-Milgram conditions we introduce the notation

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} uv, \quad \text{and} \quad L(v) = \int_{\partial\Omega} gv.$$

Then $a(u,v)$ is a scalar product with the corresponding norm $||v||_a = a(v,v)^{1/2}$. For instance we have that $||v||_a = 0$, only if $v = 0$:

$$0 = ||v||_a^2 = a(u,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{\partial\Omega} v^2 \ge \alpha \int_\Omega v^2, \qquad \text{for some } \alpha > 0 \Rightarrow v = 0.$$

Further $L(v)$ is bounded in this norm, e.g. if $||g||_{\partial\Omega} < \infty$, then

$$|L(v)| \leq ||g||_{\partial\Omega}||v||_{\partial\Omega} \leq ||g||_{\partial\Omega}||v||_a.$$

We can also apply Riesz theorem in the sense that there existes u such that

$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v,$$

and u is uniquely determined by

$$||u||_a = ||g||_{\partial\Omega}.$$

Moreover since

$$a(u,v) = -\int_\Omega \Delta uv + \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial n} + u)v,$$

we have that

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = g \quad \text{on } \Gamma.$$

MA

TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15
Telefonjour/rond: Erik Broman, tel. 0740-459022
Hjälpmedel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.

==

Som vanligt betecknar $\dot{u}$ tidsderivata, u' och ∇u betecknar x-derivata resp. gradient m.a.p. $x = (x_1, .., x_d)$ av $u(x,t)$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ betecknar Laplaceoperatorn, $||u||_\omega$ betecknar L_2-norm av u över ω, och f är givna data.

1. a) Redogör för en lämplig finit element metod för problemet

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f & \text{för } 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u = 0 \quad \text{för } t = 0, & u'(0,t) = u'(1,t) = 0 \quad \text{för } t > 0. \end{cases}$$

b) Skissera det förväntade utseendet av $u(x,1)$ och $u(0,t)$ för $f(x,t) = x$. (10p)

2. Låt u vara lösningen till

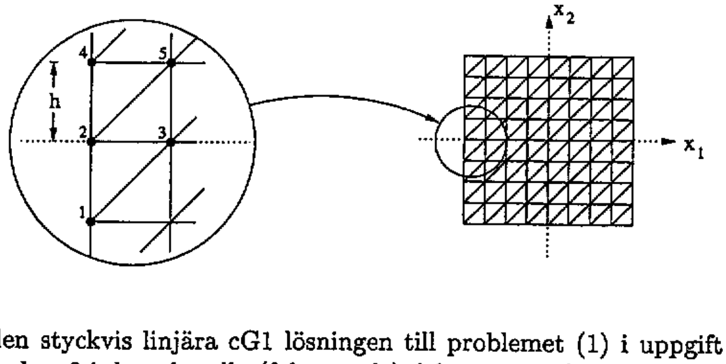
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ -\partial_n u = ku & \text{på } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

där Ω är ett område i R^d, med rand Γ, $\partial_n u = n \cdot \nabla u$ är riktningsderivatan av u i utåtriktade enhetsnormalens riktning, och $k \geq 0$ är en konstant.
a) Visa att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$. Tips: multiplicera med u, integrera, och utnyttja olikheterna

$$||u||_\Omega \leq C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega) \tag{2}$$

och $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.
b) Härled uppskattningen (2). Tips: Tag hjälp av en (snäll) funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ och utnyttja att $||u||^2_\Omega = \int_\Omega u^2 \Delta\phi = ...$ (10p)

3. Låt Ω vara området i figur, med given triangulering och nodnummer, och låt



U vara den styckvis linjära cG1 lösningen till problemet (1) i uppgift 2, med $f = 1$ och $k = 0$ i den aktuella (fokuserade) delen av området.
a) Vilket samband råder (givet av testfunktionen ϕ_2) mellan nodvärdena U_1, U_2, U_3, U_4 och U_5?
b) Vilket blir motsvarande samband om ekvationen ändras till $-\Delta u + (1,0) \cdot \nabla u = 1$ alternativt (välj ett av fallen!) $-\nabla \cdot a \nabla u = 1$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$? (10p)

V.G.V. !

4. Funktionerna

$$\text{a) } \frac{1}{4\pi|x|} \qquad \text{b) } \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{och} \qquad \text{c) } \int_{R^3} \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$$

är lösningar till fundamentala differentialekvationsproblem. Vilka? Glöm ej att ange typ av område/rumsdimension, begynnelsevillkor och randvillkor!
d) En punktvärmekälla med intensitet 1 per volymsenhet har verkat i origo i 3D under (mycket) lång tid, utgående från 0-temperatur överallt. Ange en formel för den resulterande temperaturfördelningen i 3D-rummet.
e) Utgående från temperaturfördelningen i d) "slocknar" plötsligt värmekällan vid $t = 0$. Hur utvecklas temperaturen i origo för $t > 0$. (10p)

5. Betrakta

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds.$$

Uppenbarligen gäller $u(x,0) = 0$.
a) Visa att även $\dot{u}(x,0) = 0$. Tips: se Beta avsnitt "Differential formulas".
b) Visa att u löser vågekvationen $\ddot{u} - u'' = f$.
c) Skissera $u(x,1)$ för $-3 \le x \le 3$ om $f = 1$ för $-1 < x < 1$ och $f = 0$ för övrigt. (10p)

Lycka till / K.E.

TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2002-01-15, lösningar

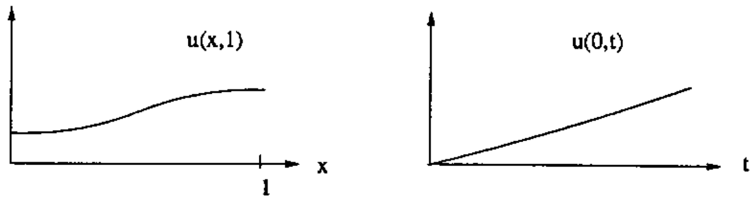
1. a) Se föreläsningsant eller bok. cG1cG1-ansatsen $U(x,t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t)$ med $U_n(x) = \sum_{j=0}^{M} U_{n,j}\phi_j(x)$ insatt i variationsformuleringen $\int_0^1 v'u' = \int_0^1 vf$ av problemet med testfunktionerna $v = \phi_i, i = 0,..,M$, resulterar i ekvationssystemet

$$(M + \frac{k}{2}S)U_n = (M - \frac{k}{2}S)U_{n-1} + kb_n,$$

där $k = t_n - t_{n-1}$ är tidssteget, U_n är nodvärdesvektorn med element $U_{n,j}$, M är massmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i\phi_j$, S styvhetsmatrisen med element $\int_0^1 \phi_i'\phi_j'$, och b_n är lastvektorn med element $\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_0^1 \phi_i f$. Motsvarande för dG0 ($\approx$ implicit Euler) tidsstegning ger

$$(M + kS)U_n = MU_{n-1} + kb_n,$$

b)



2. a) Multiplikation av $-\Delta u = f$ med u, integration över Ω, och partiell integration med utnyttjande av randvillkoret $-\partial_n u = ku$, samt Cauchys olikhet och olikheten $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ger

$$||\nabla u||_\Omega^2 + k||u||_\Gamma^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \int_\Gamma u(\overbrace{-\partial_n u}^{=ku}) = \int_\Omega u(-\Delta u) = \int_\Omega uf$$

$$\leq ||u||_\Omega\,||f||_\Omega \leq C_\Omega(||u||_\Gamma + ||\nabla u||_\Omega)\,||f|| = ||u||_\Gamma C_\Omega||f||_\Omega + ||u||_\Omega C_\Omega||f||_\Omega$$

$$\leq \frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + C_\Omega^2||f||_\Omega^2$$

Efter subtraktion av $\frac{1}{2}||u||_\Gamma^2 + \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2$ från båda led följer att

$$(k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \leq \frac{1}{2}||\nabla u||_\Omega^2 + (k - \frac{1}{2})||u||_\Gamma^2 \leq C_\Omega^2||f||_\Omega^2,$$

vilket ger att $||u||_\Gamma \to 0$ då $k \to \infty$, v.s.v.

b) Enligt tips fås med snäll funktion ϕ sådan att $\Delta\phi = 1$ att

$$||u||_\Omega^2 = \int_\Omega u^2\Delta\phi = \int_\Gamma u^2\partial_n\phi - \int_\Omega \overbrace{\nabla u^2}^{2u\nabla u}\cdot\nabla\phi$$

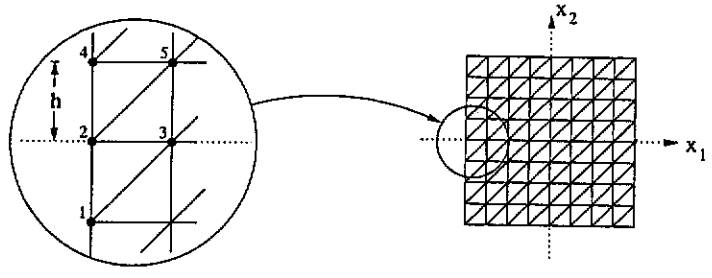
$$\leq C_1\|u\|_\Gamma^2 + C_2\|u\|\,\|\nabla u\| \leq C_1\|u\|_\Gamma^2 + \frac{1}{2}\|u\|_\Omega^2 + \frac{1}{2}C_2^2\|\nabla u\|_\Omega^2,$$

dvs

$$\|u\|_\Omega^2 \leq 2C_1\|u\|_\Gamma^2 + C_2^2\|\nabla u\|_\Omega^2 \leq C^2(\|u\|_\Gamma + \|\nabla u\|_\Omega)^2,$$

där $C^2 = \max(2C_1, C_2^2)$, $C_1 = \max_\Gamma|\partial_n\phi|$, $C_2 = \max_\Omega(2|\nabla\phi|)$, v.s.v.

3. a) Med U uttryckt i basfunktionerna ϕ_j, $j = 1,2,3,4,5,..$ och med testfunktion $v = \phi_2$ i variationsformuleringen av problemet erhålls sambandet $-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 = \frac{1}{2}h^2$



b) Med ekv ändrad till $-\Delta u + (1,0)\cdot\nabla u = 1$ blir sambandet

$$-\frac{1}{2}U_1 + 2U_2 - U_3 - \frac{1}{2}U_4 - \frac{h}{3}U_2 + \frac{h}{3}U_3 - \frac{h}{6}U_4 + \frac{h}{6}U_5 = \frac{1}{2}h^2,$$

och med ekv. ändrad till $-\nabla\cdot a\nabla u = f$ med $a = 1$ för $x_2 < 0$ och $a = 2$ för $x_2 > 0$ blir det $-\frac{1}{2}U_1 + 3U_2 - \frac{3}{2}U_3 - U_4 = \frac{1}{2}h^2$

4. a) $\frac{1}{4\pi|x|}$ lösning till $-\Delta u = \delta$ i R^3 med randvillkor $u \to 0$ då $r = |x| \to \infty$.

b) $\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ lösning till $\dot{u} - \Delta u = 0$ i $x \in R^3$, $t > 0$ med begynnelsevillkor $u = \delta$ för $t = 0$ och randvillkor som i a).

c) $\int_{R^3}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}v(y)\,dy$ är lösning till samma problem som i b) men med begynnelsevärdet $u = v$ för $t = 0$.

d) Lösningen i a)

e) Lösningen i d) med $v = \frac{1}{4\pi|y|}$, dvs

$$\begin{aligned}\int_{R^3}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{|0-y|^2}{4t}}\frac{1}{4\pi|y|}\,dy &= \frac{1}{t^{3/2}}4\pi\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}}\frac{1}{4\pi r}\,r^2\,dr\\ &= \{s = \tfrac{r^2}{4t}\} = \frac{2}{t^{1/2}}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = 2\frac{1}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

5. a) Tidsderivatan av $u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\,ds$ blir

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tfrac{1}{2}\int_{x-t+t}^{x+t-t} f(y,t)\,dy + \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s)(-1)\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s) + f(x-t+s),\end{aligned}$$

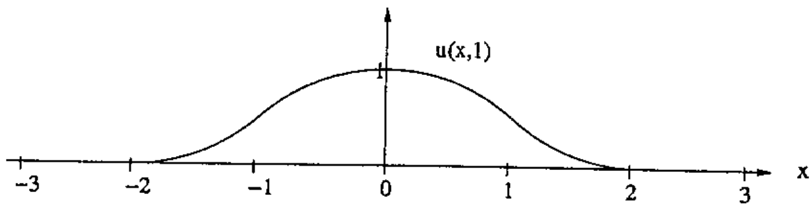
dvs för $t = 0$ fås $\dot{u}(x, 0) = 0$.
b) Ytterligare en tidsderivering ger

$$\ddot{u} = f(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+t-s,s) - f'(x-t+s,s).$$

Derivering m.a.p. x ger $u'(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s)$ och

$$u''(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+t-s,s) - f'(x-t+s,s),$$

dvs $\ddot{u} - u'' = f$, vilket skulle visas.
c)



TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26
Telefonjour/rond: Richards Grzibovski, tel. 0740-459022
Hjälpmedel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.

==

1. a) Härled en lösning u till ekvationen $-\Delta u = \delta$ i R^3, där $\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x)$,

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} & \text{för } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{för } |x| > \epsilon. \end{cases}$$

b) Visa hur lösningen i a) kan utnyttjas till att lösa $-\Delta u = f$ för godtycklig funktion f.
c) Låt f vara funktionen som är $= \frac{3}{4\pi}$ i $\{x : |x| < 1\}$ och $= 0$ för övrigt, och beräkna lösningen $u(x)$ enligt b) i någon (valfri) punkt i rummet, alternativt, undersök huruvida lösningen i a) multiplicerad med $e^{-|x|}$ ger en lösning till ekvationen $-\Delta u + u = \delta$. (10p)

2. Formulera en rand-elementmetod för (approximativ) lösning av problemet

$$-\Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = g \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där Ω är ett begränsat område i R^3, och $\partial\Omega$ är randen till Ω. (10p)

3. a) Formulera cG1 metoden för tidsdiskretisering av $\dot{u} + a\,u = f$ för $t > 0$, med givet begynnelsevillkor $u(0) = u_0$.
b) Vilket numeriskt problem kan uppstå om a är stort i förhållande till tidssteget.
c) Vad menas med residualfelet och hur figurerar detta i en a posteriori feluppskattning för metoden.
d) Skissera huvuddragen i härledningen av en sådan uppskattning.
e) Spelar tecknet på a någon roll i sammanhanget, t.ex. för (dual)problemets stabilitetsegenskaper? (10p)

4. a) Betrakta "Schrödingerekvationen"

$$i\,\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där $i = \sqrt{-1}$ och $u = u_1 + i\,u_2$. Visa (genom att multiplicera med $\bar{u} = u_1 - i\,u_2$ och betrakta imaginärdelarna) att kvantiteten $\int_\Omega |u|^2$ (dvs "totalsannolikheten") är tidsoberoende.
b) Betrakta motsvarande "egenvärdesproblem", dvs att hitta tal λ och motsvarande lösningar $u \neq 0$ sådana att

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega.$$

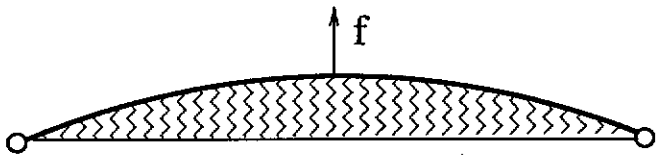
Visa att sådana λ måste vara > 0, och ange sambandet mellan $||u||$ och $||\nabla u||$ för motsvarande egenfunktioner u.
Vilket är det minsta värde på konstanten C för vilken olikheten $||u|| \leq C\,||\nabla u||$ kan tänkas gälla för alla funktioner u sådana att $u = 0$ på $\partial\Omega$, uttryckt i minsta egenvärdet λ_1? (10p)

Var god vänd !

5. Betrakta problemet

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

a) Ge en fysikalisk tolkning av ekvation och randvillkor, med ledning av figuren.
b) Formulera en cG1 finit elementmetod för problemet, utgående från följande



ekvivalenta *system* av ekvationer:

$$\begin{cases} u'' - v = 0 \\ v'' + u = f. \end{cases}$$

Ange speciellt hur nodvärdesvektorn U kan beräknas från lastvektorn F uttryckt i tillhörande styvhets- och massmatriser.
c) Härled en stabilitetsuppskattning för lösningen u och v (alternativt motsvarande diskreta lösning U och V) i termer av f. Tips: Multiplicera ekvationerna med v resp. u. Uppskattningen $\|v\| \leq C\,\|v'\|$ som i uppgift 4, kan också bli användbar. (10p)

Lycka till / K.E.

TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26

==

1. a) Räknar i polära koordinater med $r = |x|$, och söker lösning $u = u(r)$ sådan att $\Delta u = r^{-2}(r^2 u')' = -\delta_\epsilon$, dvs

$$r^2 u' = \int r^2(-\delta_\epsilon) = \begin{cases} -\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\frac{r^3}{3} + C_1 & \text{för } r < \epsilon \\ C_2 & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Insättning av $r = 0$ ger $C_1 = 0$, varefter kontinuitet för $r = \epsilon$ ger $C_2 = -\frac{1}{4\pi}$. Division med r^2 och ny integration ger

$$u(r) = \begin{cases} .. & \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}(+C_3) & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Då $\epsilon \to 0$ erhålls $u(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$, dvs $u(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$.

b) Lösning ges av $u(x) = \int_{R^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} f(y)dy$.

c) Beräknar $u(x)$ i $x = (0,0,R)$ för $R > 1$ (lättast integral fås med $R = 0$) med hjälp av rymdpolära koordinater $r(\cos(\phi)\cos(v), \sin(\phi)\sin(v), \cos(v))$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|y|<1} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{3}{4\pi}dy \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R-r\cos(v))^2+r^2\sin^2(v)}} r^2\sin(v)\,d\phi\,dv\,dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}2\pi\int_0^1\int_0^\pi \frac{r^2\sin(v)}{\sqrt{R^2-2Rr\cos(v)+r^2}}\,dv\,dr \\ &= \frac{6}{16\pi}\int_0^1 \frac{r}{R}[\sqrt{R^2-2Rr\cos(v)+r^2}]_{v=0}^{v=\pi}dr \\ &= \frac{6}{16\pi}\frac{1}{R}\int_0^1 2r^2\,dr = \frac{1}{4\pi R}. \end{aligned}$$

c) Sätter $u = e^{-r}\frac{1}{4\pi r}$ och beräknar

$$\begin{aligned} \Delta u &= r^{-2}(r^2u')' = r^{-2}(r^2(-e^{-r}\tfrac{1}{4\pi r} - e^{-r}\tfrac{1}{4\pi r^2}))' \\ &= r^{-2}\tfrac{1}{4\pi}(-e^{-r}r - e^{-r})' = r^{-2}\tfrac{1}{4\pi}e^{-r}r = u, \end{aligned}$$

dvs $-\Delta u + u = 0$ för $r > 0$ v.s.v. För att visa att $-\Delta u + u = \delta$ noterar vi att $-\Delta u + u = -\Delta\frac{1}{4\pi r} - \Delta(e^{-r}-1)\frac{1}{4\pi r} + e^{-r}\frac{1}{4\pi} = ...$

2. Enligt uppgift 1 ger $u(x) = \int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy$ en lösning till $\Delta u = 0$ i Ω. Söker därför ϕ så att även randvillkoret $u = g$ uppfylls, dvs

$$\int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy = g(x) \quad \text{för } x \in \Gamma.$$

Inför rand-element, dvs delar in Γ i disjunkta element K_i sådana att $\Gamma = \cup_{i=1}^m K_i$, och ansätter (approximativ lösning) $\phi(y) = \sum_i \phi_i\Phi_i(y)$ där $\Phi_i(y) = 1$ på element K_i och $= 0$ för övrigt. För att bestämma lämpliga koefficienter ϕ_i används (t.ex.)

$$\int_{K_j}\int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy\,dx = \int_{K_j} g(x)dx, \quad j = 1,..,m,$$

vilket ger m ekvationer för beräkning av koefficienterna $\phi_1, \ldots, \phi_m$ i $\phi(y)$, som i sin tur ger $u(x)$.

3. a)-d) Se föreläsningsanteckningarna.
e) Ja, $a < 0$ ger exponentiell tillväxt i problemet, såväl det givna som dualproblemet. Speciellt blir stabilitetskonstanten $\int_0^T |\dot{\Phi}|$ i a posteriori feluppskattningen stor för stora T.

4. a) Integration över Ω av givna ekvationen $i\,\dot{u} - \Delta u = 0$ multiplicerad med $\bar{u}$ samt partiell integration ger

$$0 = \int_\Omega \bar{u} i \dot{u} - \int_\Omega \bar{u} \Delta u = \int_\Omega i(u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2) + u_2\dot{u}_1 - u_1\dot{u}_2 + \nabla\bar{u}\cdot\nabla u,$$

med imaginärdel

$$\int_\Omega u\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u_1^2 + u_2^2,$$

som alltså måste vara $= 0$, dvs $\int_\Omega |u|^2$ är tidsoberoende, v.s.v.

b) Multiplikation av egenvärdesekvationen $-\Delta u = \lambda u$ med u, integration över Ω, och partiell integration ger

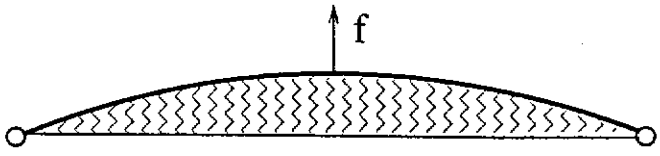
$$\lambda \underbrace{\int_\Omega u^2}_{\geq 0} = \int_\Omega u(-\Delta u) = \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2}_{\geq 0},$$

dvs $\lambda \geq 0$ (med sträng olikhet för $u \neq 0$) och $||u|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}||\nabla u||$, dvs konstanten C i olikheten $||u|| \leq C||\nabla u||$, gällande för alla u sådana att $u = 0$ på Γ, kan inte vara mindre än $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ där $\lambda_1 > 0$ är det minsta egenvärdet. I själva verket gäller olikheten $||u|| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}||\nabla u||$ för alla u sådana att $u = 0$ på Γ, eftersom u kan uttryckas i egenfunktionerna och dessa är parvis ortogonala, både "utan och med gradienter", dvs $\int_\Omega u_i u_j = 0$ och $\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j = 0$ för $i \neq j$, men detta ingick inte i uppgiften.

5. a) Fysikaliska tolkning:

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

modellerar en balk med vertikal förskjutning $u = u(x)$ p.g.a. en vertikal last $f = f(x)$, delvis balanserad av en "återhållande" kraft u. Balken är (momentfritt $u'' = 0$) förankrad med $u = 0$ för $x = 0$ och $x = 1$.



b) Multiplikation av de två ekvationerna i systemet med testfunktioner ϕ och ψ, med $\phi = \psi = 0$ för $x = 0$ och $x = 1$, ger efter partiell integration

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi' u' - \phi v) = 0 \\ \int_0^1 (-\psi' v' + \psi u) = \int_0^1 \psi f. \end{cases}$$

Indelar $[0,1]$ i element $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = j/(m+1)$, och ansätter styckvis linjära approximativa lösningar $U(x) = \sum_{j=1}^m U_j \phi_j(x)$ och $V(x) = \sum_{j=1}^m V_j \phi_j(x)$, där $\phi_j(x)$ är de vanliga hatt-bas funktionerna, och söker nodvärden U_j och V_j sådana att

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi_i' U' - \phi_i V) = 0, & i = 1,..,m \\ \int_0^1 (-\phi_i' V' + \phi_i U) = \int_0^1 \psi f, & i = 1,..,m. \end{cases}$$

Detta ger $2m$ ekvationer för de $2m$ sökta nodvärdena $U = [U_1 .. U_m]^\top$ och $V = [V_1 .. V_m]^\top$, vilket kan skrivas på matrisform som

$$\begin{cases} -SU - MV = 0, \\ -SV + MU = F, \end{cases}$$

där S och M är de vanliga styvhets och massmatriserna med element $2/h$ respektive $2h/3$ på diagonalerna, $-1/h$ resp. $h/6$ på sub och superdiagonalerna, och nollor för övrigt, och F är lastvektorn med element $\int_0^1 \phi_i f$.
Första ekvationen ger $V = -M^{-1}SU$ vilket insatt i den andra ger $(SM^{-1}S + M)U = F$, dvs $U = (SM^{-1}S + M)^{-1}F$.

c) Multiplicerar första ekvationen med $-v$ och den andra med u, adderar de två, integrerar, och integrerar partiellt. Detta ger

$$\int_0^1 u^2 + v^2 = \int_0^1 uf,$$

dvs

$$||u||^2 + ||v||^2 = \int_0^1 uf \leq ||u||\,||f||,$$

varifrån följer att $||u|| \leq ||f||$, och därmed att $||v|| \leq ||f||$.
Alternativt kan första ekvationen multipliceras med $-u$ och den andra med $-v$, adderas, integreras, och integreras partiellt, vilket ger

$$\int_0^1 (u')^2 + (v')^2 = \int_0^1 (-v)f \leq ||v||\,||f|| \leq ||v'||\,||f||,$$

varav följer att $||v'|| \leq ||f||$ och sedan $||u'|| \leq ||f||$.

(Med dessa grundläggande stabilitetsuppskattningar givna kan man sedan använda ekvationerna till att uppskatta t, som t.ex. momentet $v = u''$:

$$||u''|| = ||v|| \leq ||f||,$$

och v'':

$$||v''|| = ||f - u|| \leq ||f|| + ||u|| \leq 2||f||,$$

om man så vill.)

/

TMA 690 Partiella differentialekvationer F, 2001-01-10
Hjälpmedel: Beta och typgodkänd kalkylator.
Telefonjour/rond: Johan Hoffman, tel. 0740-459022.

==

Som vanligt betecknar $\nabla u = (u_x, u_y)$ och $\dot{u} = u_t$ partiella derivator av $u = u(x, y, t)$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ betecknar Laplaceoperatorn, och $\|v\|$ betecknar L_2 normen av v över aktuellt område. Lycka till!!

1. Betrakta problemet

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \Omega, \qquad n \cdot \nabla u = b(g-u) \quad \text{på } \Gamma,$$

där Ω är ett område i planet med rand Γ, och f, $b > 0$, och g är givna funktioner på Ω resp. Γ, och n är enhetsnormalen till Γ riktad ut från Ω.
(a) Visa att för en lösning u till detta problem gäller

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma buv = \int_\Omega fv + \int_\Gamma bgv,$$

för alla (deriverbara) funktioner v definerade på Ω, inklusive Γ.
(b) Lösningen u till det givna differentialekvationsproblemet, resp. variationsproblemet i (a), löser även ett visst minimeringsproblem. Vilket? (10p)

2. Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i uppgift 1. (10p)

3. Härled någon typ av feluppskattning för metoden i 2, alternativt, generalisera beräkningsmetodiken i 2 till något motsvarande tidsberoende problem (inkluderande en $\dot{u}$- alt. $\ddot{u}$-term). (10p)

4. (a) Vad kan sägas om existens av lösning u till problemet i 1, t.ex. grundat på lämplig matematisk sats?
(b) Notera att motsvarande problem med $b \leq 0$ inte alltid har någon lösning! T.ex. finns för $b = 0$ lösning endast om $\int_\Omega f = 0$. Hur kan man se det? Ge även någon fysikalisk tolkning av detta förhållande. (10p)

5. Låt u vara lösning till problemet i 1 med $b = 1$ och $g = 0$, och med Ω en kvadrat. Visa att

$$\|D^2 u\| \leq \|f\|,$$

där $D^2 v = (v_{xx}^2 + v_{xy}^2 + v_{yx}^2 + v_{yy}^2)^{1/2}$ är ett mått på v's andraderivator (av vilka ju v_{xy} och v_{yx} kan förväntas vara lika). Tips: partialintegrera, och utnyttja att på kvadratens sidor gäller $u_y n_2 = -u$ resp. $u_x n_1 = -u$ (och i dess hörn följaktligen $u_x = \pm u_y$). Varför? (10p)

/KE

Partiella differentialekvationer F, 2001-01-10 - lösningar

==

1. a) Multiplicera ekvationen med v, integrera över Ω, och utnyttja att (genom partiell integration) $\int_\Omega \Delta uv = \int_\Gamma n \cdot \nabla uv - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, där i det aktiella fallet $n \cdot \nabla u$ kan ersättas med $b(g-u)$. Detta ger

$$\int_\Omega fv = -\int_\Omega \Delta uv = -\int_\Gamma n \cdot \nabla uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Gamma buv - \int_\Gamma bgv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

dvs

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma buv}_{=a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega fv + \int_\Gamma bgv}_{=l(v)}. \tag{1}$$

b) För $F(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - l(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w + \frac{1}{2}\int_\Gamma bww - \int_\Omega fw - \int_\Gamma bgw$ och $w = u + v$ med u som i (??) gäller

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u+v) = F(u) \\ &+ \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma buv - \int_\Omega fv - \int_\Gamma bgv}_{=0 \text{ enl. (??)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{2}\int_\Gamma bvv}_{\geq 0} \geq F(u), \end{aligned}$$

dvs $F(u) \leq F(w)$ för godtycklig w, vilket skulle visas. Kolla detaljerna!

2. Ansätter (diskret) lösning $U = \sum_{i=1}^m U_i \phi_i$ till (??) för $v = \phi_j$ med $j = 1,..,m$, vilket ger ett ekvationssystem $A\mathbf{U} = \mathbf{B}$ där $\mathbf{U}$ är kolonnvektorn med element U_i, $\mathbf{B}$ är vektorn med element

$$B_j = \int_\Omega f\phi_j + \int_\Gamma bg\phi_j,$$

och A är matrisen med element

$$A_{ji} = \int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j + \int_\Gamma b\phi_i\phi_j.$$

Här är $\phi_j = \phi_j(x)$ basfunktionerna för mängden av alla styckvis linjära functioner på en triangulering av området Ω.

3. För *energinormen* $||v|| = a(v,v)^{1/2}$ erhålls för felet $e = u - U$ utgående från definitionen av $U = U(x)$,

$$\begin{aligned} ||e||^2 &= a(e,e) = a(e, u-U) = a(e,u) - a(e,U) = a(e,u) \\ &= a(e,u) - a(e,v) = a(e, u-v) \leq ||e||\,||u-v||, \end{aligned}$$

dvs $||u-U|| = ||e|| \leq ||u-v||$ för godtycklig styckvis linjär funktion v, eftersom ju för sådana U och v gäller $a(e,U) = 0$ och $a(e,v) = 0$ då ju dessa är linjärkombinationer av basfunktionerns ϕ_j för vilka enligt definitionen av U vi har att

$$a(e, \phi_j) = a(u, \phi_j) - a(U, \phi_j) = l(\phi_j) - l(\phi_j) = 0.$$

Speciellt kan den styckvis linjära funktionen v väljas som *interpolanten* av u vilket ger

$$\|u - U\| \leq \|u - v\| \leq C\|hD^2u\|,$$

där h är elementstorleken och C en interpolationskonstant oberoende av h och u.

4. a) Lösning *finns* enligt Lax-Milgrams sats, om t.ex. $b \geq 0$ så att $a(v, v) \geq 0$ för alla v, och om f och g är sådana att $|l(v)| \leq C_l\|v\|$ för alla v, för någon constant C_l.

b) Lösningen är entydig om $b > 0$ eftersom då gäller att $a(v, v) > 0$ om v inte är $= 0$ överallt, ty om $v = u_1 - u_2$ är skillnaden mellan två lösningar gäller ju

$$a(v, v) = a(u_1 - u_2, v) = a(u_1, v) - a(u_2, v) = l(v) - l(v) = 0,$$

vilket visar att v måste vara $= 0$ överallt, dvs $u_1 = u_2$, dvs det kan inte finnas två (olika) lösningar!

5. Låt t.ex. Ω vara kvadraten $[0, 1] \times [0, 1]$. Då gäller

$$\|\Delta u\|^2 = \int_\Omega (\Delta u)^2 = \int_\Omega (u_{xx} + u_{yy})^2 = \int_\Omega u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy}.$$

Men

$$\int_\Omega u_{xx}u_{yy} = \int_\Gamma u_x u_{yy} n_1 - \int_\Omega u_x u_{yyx} = \int_\Gamma u_x u_{yy} n_1 - \int_\Gamma u_x u_{yx} n_2 + \int_\Omega u_{xy} u_{xy},$$

där vi integrerat partiellt och utnyttjat att $u_{yyx} = u_{yxy} = u_{xyy}$. Vi räknar vidare och finner att

$$-\int_\Gamma u_x u_{yx} n_2 = -\int_\Gamma u_x (u_y n_2)_x = -\int_\Gamma u_x(-u|n_2|)_x) = \int_\Gamma u_x^2|n_2| \geq 0,$$

där vi utnyttjat randvillkoret $n \cdot \nabla u = -u$ (motsvarande $b = 1$ och $g = 0$). Notera att $n_2 = 0$ på de vertikala ränderna!! Analogt erhålls

$$\int_\Gamma u_x u_{yy} n_1 = \int_\Gamma u_{yy}(-u)|n_1|,$$

vilket (efter partiell integration längs de vertikala ränderna där $n_1 \neq 0$) ger

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\Gamma u_y u_y |n_1| - u_y(1,1)u(1,1) + u_y(1,0)u(1,0) - u_y(0,1)u(0,1) + u_y(0,0)u(0,0)\\ &= \textstyle\int_\Gamma u_y u_y |n_1| + u(1,1)u(1,1) + u(1,0)u(1,0)\\ &+u(0,1)u(0,1) + u(0,0)u(0,0) \geq 0,\end{aligned}$$

där vi åter utnyttjat randvillkoret $n \cdot \nabla u = -u$. Kolla!! Dvs vi har visat att $\|\Delta u\| \geq \|D^2u\|$.

ҷ

TMA 690 Partiella differentialekvationer F, 2000-01-12
Hjälpmedel: Beta och typgodkänd kalkylator.
Telefonjour/rond: Anders Logg, ankn. 0740-459022.

Som vanligt betecknar $\dot{u}$ derivatan av $u = u(t)$, och $\|u\|_X$ betecknar L_2 normen av u över aktuellt område X. Lycka till!!

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u} + au = f \text{ för } t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

där $a(t)$, $f(t)$ och u_0 är givna data, och där vi söker $u = u(t)$.
a) Visa att om $a(t) \geq a_0$ för någon konstant a_0, så gäller

$$|u(t)| \leq e^{-a_0 t}(|u_0| + \int_0^t e^{a_0 s}|f(s)|\,ds).$$

Tips: Visa med hjälp av identiteten $\dot{u}u = |u|\frac{d}{dt}|u|$ att $\frac{d}{dt}|u| + a_0|u| \leq |f|$, och ta sedan hjälp av en integrerande faktor.
b) Formulera cG1-metoden för problemet, samt visa att villkoret $\frac{1}{2}a_0 k > -1$, där k är tidssteget, garanterar att metoden inte bryter samman (leder till division med noll).

2. Betrakta problemet

$$-\Delta u + u = f \text{ i } \Omega, \quad n \cdot \nabla u = g \text{ på } \Gamma, \tag{1}$$

där Ω är ett givet område i R^d med rand Γ, n är enhetsnormalen till Γ riktad ut från Ω, f och g är givna data, och Δ är Laplace operatorn.
a) Visa att

$$\|\nabla u\|_\Omega^2 + \|u\|_\Omega^2 \leq C(\|f\|_\Omega^2 + \|g\|_\Gamma^2)$$

för någon konstant C.
Tips: Utnyttja bl.a. att $\|u\|_\Gamma \leq C_\Omega(\|\nabla u\|_\Omega + \|u\|_\Omega)$ för någon konstant C_Ω.
b) Formulera en finit element metod för (1) samt ställ upp det resulterande ekvationssystemet i fallet med en rumsdimension med $\Omega = [0,1]$, $f(x) = 1$ och $g(0) = 7$, $g(1) = 0$.

3. a) Härled en feluppskattning för metoden i 2 b) uttryckt i elementstorleken h och lösningens andraderivata, alternativt den beräknade lösningens residual.

Vänd!

b) Härled en uppskattning för u's andraderivata uttryckt i givna data f och g. Under vilken förutsättning gäller en motsvarande uppskattning för u's andraderivator i högre dimension, dvs för $d = 2, 3$.

4. a) Härled (grova) uppskattningar för antalet räkneoperationer som krävs för lösning av det resulterande finita element ekvationsystemet för problemet (1) i fallet $d = 2$ resp $d = 3$ uttryckt i elementstorleken h om systemet löses med vanlig (Gauss) elimination.
b) Redogör kort för idérna bakom, principerna för, och fördelarna med en multigrid metod.

5. Verifiera att $g(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{|x|}}{|x|}$ för $d = 3$ (dvs $x = (x_1, x_2, x_3)$) satisfierar $-\Delta g + g = \delta(x)$, där δ är Diracs delta funktion, dvs $\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x)$, där $\delta_\epsilon(x) = \frac{3}{4\pi\epsilon^3}$ för $|x| < \epsilon$, $\delta_\epsilon(x) = 0$ för $|x| > \epsilon$, och att följaktligen $u(x) = \int_\Omega g(x, y)\, f(y)\, dy$ ger en lösning till differentialekvationen i (1) (men förmodligen inte randvillkoret, vilket dock är en annan historia). Tips: Räkna med rumspolära koordinater.

/KE

TMA 690 Partiella differentialekvationer F, 2000-01-12
Lösningar

==

1. Multiplikation av ekvationen med u ger

$$\dot{u}u + au^2 = fu,$$

varav

$$|u|\frac{d}{dt}|u| + a_0|u|^2 \leq |f||u|,$$

dvs $\frac{d}{dt}|u| + a_0|u| \leq |f|$. Multiplikation med integrerande faktorn e^{a_0t} ger $\frac{d}{dt}(e^{a_0t}|u|) \leq e^{a_0t}|f|$, vilket integrerat blir $e^{a_0t}|u(t)| - |u_0| \leq \int_0^t e^{a_0s}|f(s)|ds$, vilket ger den sökta olikheten.
cG1 metoden: Ansätter på tidsintervallet $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ lösning $U(t) = U_n(t_{n+1}-t)/k + U_{n+1}(t-t_n)/k$. Söker U_{n+1} så att

$$\int_{I_n} \dot{U} + aU = \int_{I_n} f$$

dvs

$$U_{n+1}(1 + k\int_{I_n} a(t-t_n)dt) = U_n - kU_n\int_{I_n} a(t)(t_{n+1}-t)dt + \int_{I_n} f\,dt$$

Division med $1 + k\int_{I_n} a(t-t_n)dt$, som är > 0 enligt antagandet, ger U_{n+1} utan problem!

2. a) Multiplikation av ekvationen med u ger efter partiell integration

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u + uu - \int_\Gamma n\cdot\nabla u\, u = \int_\Omega fu$$

dvs

$$||\nabla u||^2 + ||u||^2 = \int_\Omega fu + \int_\Gamma gu \leq ||f||\,||u|| + ||g||_\Gamma\, C_\Omega(||\nabla u|| + ||u||)$$

där $||\cdot|| = ||\cdot||_\Omega$ och där vi utnyttjat olikheten $||u|| \leq C_\Omega(||\nabla u|| + ||u||)$. Genom att nu utnyttja olikheten $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$ erhålls

$$||\nabla u||^2 + ||u||^2 \leq ||f||^2 + \frac{1}{4}||u||^2 + C||g||_\Gamma^2 + \frac{1}{4}||\nabla u||^2 + \frac{1}{4}||u||^2$$

varav den sökta olikheten följer.
b) Ansätter $U(x) = \sum U_j\phi_j(x)$ vilket insättes på u's plats i variationsformuleringen

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gv$$

med $v = \phi_i$ vilket ger

$$\sum_{j=1}^{N} U_j \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i + \phi_j\phi_i = \int_\Omega f\phi_i + \int_\Gamma g\phi_i \quad i = 1,..,N.$$

dvs $AU = b$ där $U = (U_1,..,U_N)^\top$, $b = (b_i)$ med element

$$b_i = h, i = 2,..,N-1, \quad b(N) = h/2, \quad b(1) = h/2 + 7,$$

och $A = (a_{ij})$ med element

$$a_{ij} = -1/h{+}h/6, \quad \text{för } i = j{+}1 \text{ och } i = j{-}1 a_{ij} = 2/h{+}2h/3, \quad \text{för } i = j, i = 2,..,N{-}1, a_{ij} =$$

3. a) Felekvationen $\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla v + ev = 0$, för elementfunktioner v, ger

$$\|\nabla e\|^2{+}\|e\|^2 = \int_\Omega \nabla e{\cdot}\nabla(u{-}v){+}e(u{-}v) \le \frac{1}{2}\|\nabla e\|^2{+}\frac{1}{2}\|u{-}v\|{+}\frac{1}{2}\|e\|^2{+}\frac{1}{2}\|u{-}v\|^2,$$

dvs

$$\|\nabla e\|^2 + \|e\|^2 \le \|\nabla(u-v)\|^2 + \|u-v\|^2 \le C\|hu''\|^2,$$

om v är lämplig interpolant av u.
b) Ekvationen ger $\|u''\| = \|u - f\| \le \|f\| + \|u\| \le C(\|f\| + \|g\|_\Gamma)$, där vi i sista ledet använt uppskattningen i 2a.
I högre dimension erhålls analogt $\|\Delta u\| \le C(\|f\| + \|g\|_\Gamma)$. Enskilda andra derivator av u kan sedan uppskattas med Δu om Ω är konvext.

4. a) Styvhetsmatrisen A har bandbredd $n = 1/h$ för $d = 2$ och $n = 1/h^2$ för $d = 3$. Antalet räkneoperationer som krävs för Gausselimination är Nn^2, där $N = 1/h^2$ resp $N = 1/h^3$ är antalet obekanta. Dvs antalet operationer blir $1/h^4$ för $d = 2$ och $1/h^7$ för $d = 3$, där vi tänkt oss att området ifråga är enhetskuben.
b) Se föreläsningsanteckningarna

5. Verifierar först att $-\Delta g + g = 0$ för $|x| > 0$. Ekvationen $-\Delta g + g = \delta$ multipliceras med testfunktion v sådan att $v \to 0$ då $|x| \to \infty$, och integreras över R^3: Efter partiell integration erhålls

$$\int_{R^3} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \int_{R^3} \delta v = v(0).$$

Undersöker om $g = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{|x|}}{|x|}$ uppfyller detta:

$$\int_{R^3} \nabla g \cdot \nabla v + gv = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \nabla g \cdot \nabla v + gv$$

$$= \int_{|x|>\epsilon} (-\Delta g + g)v + \int_{|x|=\epsilon} n \cdot \nabla g v = \int_{|x|=\epsilon} \frac{1}{4\pi}(\frac{e^\epsilon}{\epsilon^2} - \frac{e^\epsilon}{\epsilon})v \to v(0),$$

då $\epsilon \to 0$, vilket skulle visas. Har här utnyttjat att $-\Delta g + g = 0$ för $|x| > 0$.

TMA690 Partiella Differentialekvationer F - tentamen 000822
Hjälpmedel: Beta
Telefonjour/rond: Fredrik Altenstedt, persons. 0740-459022

==================================

Som vanligt betecknar v' och $\dot{v}$ derivatan m.a.p. x resp. t av $v = v(x,t)$, och $||\cdot||$ betecknar L_2-norm i x-led.
Välj 5 av uppgifterna.

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{u} - (ku')' = f \text{ för } 0 < x < 1, t > 0,\\
&u = u_0 \text{ och } \dot{u} = v_0 \text{ för } t = 0,\\
&u(0,t) = 0 \text{ och } u'(1,t) = 0 \text{ för } t > 0,
\end{aligned}
$$

där $m = m(x) > 0$, $k = k(x) > 0$, $f = f(x,t)$, $u_0 = u_0(x)$ och $v_0 = v_0(x)$ är givna, och där vi söker $u = u(x,t)$.
a) Ge en fysikalisk tolkning av det givna problemet, dvs ange vad ingående storheter kan tänkas representera, samt vad ekvationerna uttrycker.
b) Formulera och bevisa den naturliga energikonserveringsprincip som gäller för detta system om $f = 0$. (10p)

2. Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i 1. Beskrivningen skall vara kortfattad men ändå komplett. (10p)

3. Betrakta, refererande till uppgift 1, motsvarande *stationära* problem

$$-(ku')' = f, 0 < x < 1, u(0) = u'(1) = 0.$$

a) Visa att lösningen till detta problem minimerar energiintegralen $F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 k(v')^2 - \int_0^1 fv$, dvs att $u \in V$ och

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v),$$

i ett visst funktionsrum V.
b) Visa att för $k = 1$ och ett motsvarande diskret minimum $F(U) = \min_{v \in V_h} F(v)$ med $U \in V_h \subset V$ gäller

$$F(U) = F(u) + \frac{1}{2}||(u-U)'||^2.$$

c) Ange för $k = 1$ en a posteriori feluppskattning för det diskreta energiminimat, dvs för $|F(U) - F(u)|$ om V_h består av styckvis linjära funktioner på delintervall av längd h. (10p)

Var god vänd!

4. Visa att för den linjära interpolanten u_i till u på *ett* intervall $I = [a, b]$ av längd $h = b - a$ gäller

$$\max_I |u - u_i| \leq h^2 \max_I |u''|$$

och

$$\max_I |u' - u_i'| \leq h \max_I |u''|.$$

(10p)

5. Formulera Lax-Milgrams sats samt skissera någon tillämpning av densamma. Härled stabilitetsuppskattningen i satsen från gjorda antaganden, samt med hjälp av denna entydigheten, dvs att det inte kan finnas två olika lösningar. (10p)

6. Black-Scholes ekvation för värdet u av en option kan skrivas på formen

$$\dot{u} - u'' + au' + bu = 0,$$

(där $x = \exp(s)$, $t = T - \frac{1}{2}\sigma^2\tau$, s är priset på den underliggande aktien, τ är tiden, T är inlösentid, σ är den s.k. volatiliteten, $b = 2r/\sigma^2$ och $a = 1 - b$, där $r \geq 0$ är räntan).
Antar här att a och $b \geq 0$ är konstanter oberoende av x och t.
a) Visa att för $u = u(x,t)$, $t > 0$ gäller

$$||u(\cdot, t)|| \leq ||u_0||$$

givet att $u(x,t) \to 0$ då $x \to \pm\infty$, där $||v||$ betecknar L_2-normen i "rumsled", dvs över $-\infty < x < \infty$ och $u_0(x) = u(x, 0)$.
Tips: Multiplicera med u och integrera, och utnyttja att $u'u = \frac{1}{2}(u^2)'$.
b) Beräkna lösningen $u(x,t)$ uttryckt i u_0.
Tips: Multiplicera först med integrerande faktorn e^{bt} och skriv om ekvationen som en ekvation för $v = e^{bt}u(x,t)$. Notera sedan att den resulterande ekvationen för v har "fundamentallösningen"

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-at|^2}{4t}}.$$

Se där, en kalkyl som gav Nobelpris för några år sen!! (10p)

Lycka till!/K.E.

TMA690 Partiella Differentialekvationer F - tentamen 000822 - lösningar
==

1. a) Se förel.ant. F1:1-4. Alt. kan $u(x,t)$ t.ex. representera longitudinell förskjutningen i en balk med densitet (massa per längdenhet) m och (lokal) "fjäderkonstant" k, som i F1:8 och projekt 1. Differentialekvationen uttrycker kraftjämvikt, dvs att tröghetskraften $m\ddot{u}\,dx$, yttre krafter $f\,dx$, och spänningsdifferensen $d(ku')$ verkande på ett segment av längd dx av balken är i balans. Kraften f kan t.ex. vara egentyngden om balken hänger vertikalt. Randvillkoret $u(0,t)=0$ motsvarar att balken sitter fast, $(k)u'(1,t)=0$ att den är (spännings)fri.
b) Se förel.ant. F2: . Multiplicerar ekvationen med $\dot{u}$ och integrerar m.a.p. x. Efter partiell integration av $-\int_0^1 (ku')'\dot{u}\,dx$ erhålls (inga randtermer p.g.a. att $\dot{u}(0,t)=0$ och $u'(1,t)=0$)

$$\int_0^1 m\ddot{u}\dot{u}\,dx + \int_0^1 ku'\dot{u}'\,dx = 0.$$

Men detta kan skrivas om som $\frac{d}{dt}E(t)=0$, där

$$E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 m(\dot{u})^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 k(u')^2)\,dx,$$

dvs den totala energin $E(t)$ (summan av kinetiska energin $E_{kin}(t)$ och potentiella energin $E_{pot}(t)$) är oberoende av tiden t, dvs konserveras.

2. Se förel. F8:1-4. Ekvationen skrivs om som ett system av två ekvationer: $m\dot{u} - mv = 0$ (alt. $\dot{u} - v = 0$ som i fallet $m=1$) och $m\dot{v} - (ku')' = f$. Massmatrisen M får nu elementen $\int_0^1 m\phi_i\phi_j\,dx$ och styvhetsmatrisen S elementen $\int_0^1 k\phi_i'\phi_j'\,dx$. Annars är allt som vanligt!

3. a) Se förel.ant. F5:1-2. Enda modifikationen är vikten k. Från ekvationen för u följer efter multiplikation med w och partiell integration att

$$\int_0^1 ku'w'\,dx = \int_0^1 fw\,dx. \tag{1}$$

För godtyckligt $v = u + w$ följer nu

$$F(v) = F(u+w) = F(u) + \int_0^1 ku'w'\,dx - \int_0^1 fw\,dx + \int_0^1 k(w')^2\,dx \geq F(u),$$

12

ty de två första integralerna tillsammans är lika med 0, och den tredje är ≥ 0.
b) Utförligt redovisat på en övning. För $k = 1$ gäller

$$\begin{aligned}||(u-U)'||^2 &= \textstyle\int_0^1 (u-U)'(u-U)'\,dx = \int_0^1 (u-U)'(u+U)'\,dx \\ &= \textstyle\int_0^1 (u')^2\,dx - \int_0^1 (U')^2\,dx = -2F(u) + 2F(U),\end{aligned}$$

eftersom $\int_0^1 (u-U)'v'\,dx = 0$ för $v \in V_h$, speciellt för U, och eftersom (tag $w = u$ i (1)) $2F(u) = ||u'||^2 - 2\int_0^1 fu\,dx = -||u'||^2$, och analogt $2F(U) = -||U'||^2$.
c) Erinrar oss (i det aktuella fallet med en rumsdimension och $k = 1$) att $||u' - U'|| \leq C||hf||$, där C är en interpolationskonstant. Detta ger $|F(U) - F(u)| \leq \frac{1}{2}C^2||hf||^2$.

4. Se t.ex. CDE sid. 80-83.

5. Se förel.ant. F5:1-6. Antag att $a(u_i, v) = l(v)$ för alla $v \in V$ för $i = 1, 2$. För *skillnaden* $u = u_1 - u_2$ gäller då p.g.a. lineariteten, $a(u, v) = 0$, motsvarande $l(v) = 0$ med $\gamma = 0$, dvs från stabilitetsuppskattningen $||u|| \leq \frac{\gamma}{\alpha}$ följer att $||u|| = 0$, dvs $u_1 = u_2$.

6. a) Multiplikation av ekvationen med $u\,dx$ och integration över $R = (-\infty, \infty)$ ger, efter partiell integration i $-\int_R u''u\,dx$,

$$\int_R \dot{u}u\,dx + \int_R (u')^2\,dx + a\int_R u'u\,dx + b\int_R u^2\,dx,$$

där $\int_R u'u\,dx = \frac{1}{2}\int_R (u^2)'\,dx = 0$, dvs $\int_R \dot{u}u\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_R u^2\,dx \leq 0$, eftersom de andra termerna är ≥ 0, dvs $||u||^2 = \int_R u^2(x,t)\,dx$ är avtagande i tiden, vilket ger den sökta olikheten.
b) Multiplikation med e^{bt} ger för $v = e^{bt}u(x,t)$ ekvationen

$$\dot{v} - v'' + av' = 0.$$

Lösningen till denna ekvation med begynnelsevärdet $\delta(x)$ (Dirac funktionen) ges av $F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x-at|^2}{4t}}$, dvs lösningen med begynnelsevärde v_0 ges av $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y,t)v_0(y)\,dy$, dvs $u(x,t) = e^{-bt}\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y,t)u_0(y)\,dy$, eftersom $v_0 = e^0 u_0 = u_0$.

17

TMA690 Partiella Differentialekvationer F - tentamen 000523
Hjälpmedel: Beta
Telefonjour/rond: Niklas Eriksson, persons. 0740-459022

==

Som vanligt betecknar v' och $\dot{v}$ derivatan m.a.p. x resp. t av $v = v(x,t)$, och $\|\cdot\|$ betecknar L_2-norm i x-led.
Välj 5 av uppgifterna.

1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$m\ddot{u} - (ku')' = f \text{ för } 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u = u_0 \text{ och } \dot{u} = v_0 \text{ för } t = 0,$$
$$u(0,t) = 0 \text{ och } u'(1,t) = 0 \text{ för } t > 0,$$

där $m = m(x) > 0$, $k = k(x) > 0$, $f = f(x,t)$, $u_0 = u_0(x)$ och $v_0 = v_0(x)$ är givna, och där vi söker $u = u(x,t)$.
a) Ge en fysikalisk tolkning av det givna problemet, dvs ange vad ingående storheter kan tänkas representera, samt vad ekvationerna uttrycker.
b) Formulera och bevisa den naturliga energikonserveringsprincip som gäller för detta system om $f = 0$. (10p)

2. Formulera en lämplig finit elementmetod för problemet i 1. Beskrivningen skall vara kortfattad men ändå komplett. (10p)

3. Betrakta, refererande till uppgift 1, motsvarande *stationära* problem

$$-(ku')' = f, 0 < x < 1, u(0) = u'(1) = 0.$$

a) Visa att lösningen till detta problem minimerar energiintegralen $F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 k(v')^2 - \int_0^1 fv$, dvs att $u \in V$ och

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v),$$

i ett visst funktionsrum V.
b) Visa att för ett motsvarande diskret minimum $F(U) = \min_{v \in V_h} F(v)$ med $U \in V_h \subset V$ gäller

$$F(U) = F(u) + \frac{1}{2}\|(u-U)'\|^2.$$

c) Ange en a posteriori feluppskattning för det diskreta energiminimat, dvs för $|F(U) - F(u)|$ om V_h består av styckvis linjära funktioner på delintervall av längd h. (10p)

4. Visa att för den linjära interpolanten u_i till u på *ett* intervall $I = [a, b]$ av längd $h = b - a$ gäller

$$\max_I |u - u_i| \leq h^2 \max_I |u''|$$

och

$$\max_I |u' - u_i'| \leq h \max_I |u''|.$$

(10p)

5. Formulera Lax-Milgrams sats samt skissera någon tillämpning av densamma. Härled stabilitetsuppskattningen i satsen från gjorda antaganden, samt med hjälp av denna entydigheten, dvs att det inte kan finnas två olika lösningar. (10p)

6. Black-Scholes ekvation för värdet u av en option kan skrivas på formen

$$\dot{u} - u'' + au' + bu = 0,$$

(där $x = \exp(s)$, $t = T - \frac{1}{2}\sigma^2\tau$, s är priset på den underliggande aktien, τ är tiden, T är inlösentid, σ är den s.k. volatiliteten, $b = 2r/\sigma^2$ och $a = 1 - b$, där $r \geq 0$ är räntan).
Antar här att a och $b \geq 0$ är konstanter oberoende av x och t.
a) Visa att för $u = u(x, t)$, $t > 0$ gäller

$$||u(\cdot, t)|| \leq ||u_0||$$

givet att $u(x, t) \to 0$ då $x \to \pm\infty$, där $||v||$ betecknar L_2-normen i "rumsled", dvs över $-\infty < x < \infty$ och $u_0(x) = u(x, 0)$.
Tips: Multiplicera med u och integrera, och utnyttja att $u'u = \frac{1}{2}(u^2)'$.
b) Beräkna lösningen $u(x, t)$ uttryckt i u_0.
Tips: Multiplicera först med integrerande faktorn e^{bt} och skriv om ekvationen som en ekvation för $v = e^{bt}u(x, t)$. Notera sedan att den resulterande ekvationen för v har "fundamentallösningen"

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x - at|^2}{4t}}.$$

Se där, en kalkyl som gav Nobelpris för några år sen!! (10p)

Lycka till!/K.E.

TMA690 Partiella Differentialekvationer F - tentamen 000523 - lösningar

===================================

1. a) Se förel.ant. F1:1-4. Alt. kan $u(x,t)$ t.ex. representera longitudinell förskjutningen i en balk med densitet (massa per längdenhet) m och (lokal) "fjäderkonstant" k, som i F1:8 och projekt 1. Differentialekvationen uttrycker kraftjämvikt, dvs att tröghetskraften $m\ddot{u}\,dx$, yttre krafter $f\,dx$, och spänningsdifferensen $d(ku')$ verkande på ett segment av längd dx av balken är i balans. Kraften f kan t.ex. vara egentyngden om balken hänger vertikalt. Randvillkoret $u(0,t)=0$ motsvarar att balken sitter fast, $(k)u'(1,t)=0$ att den är (spännings)fri.

b) Se förel.ant. F2: . Multiplicerar ekvationen med $\dot{u}$ och integrerar m.a.p. x. Efter partiell integration av $-\int_0^1 (ku')'\dot{u}\,dx$ erhålls (inga randtermer p.g.a. att $\dot{u}(0,t)=0$ och $u'(1,t)=0$)

$$\int_0^1 m\ddot{u}\dot{u}\,dx + \int_0^1 ku'\dot{u}'\,dx = 0.$$

Men detta kan skrivas om som $\frac{d}{dt}E(t)=0$, där

$$E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 m(\dot{u})^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 k(u')^2)\,dx,$$

dvs den totala energin $E(t)$ (summan av kinetiska energin $E_{kin}(t)$ och potentiella energin $E_{pot}(t)$) är oberoende av tiden t, dvs konserveras.

2. Se förel. F8:1-4. Ekvationen skrivs om som ett system av två ekvationer: $m\dot{u} - mv = 0$ (alt. $\dot{u} - v = 0$ som i fallet $m = 1$) och $m\dot{v} - (ku')' = f$. Massmatrisen M får nu elementen $\int_0^1 m\phi_i\phi_j\,dx$ och styvhetsmatrisen S elementen $\int_0^1 k\phi_i'\phi_j'\,dx$. Annars är allt som vanligt!

3. a) Se förel.ant. F5:1-2. Enda modifikationen är vikten k. Från ekvationen för u följer efter multiplikation med w och partiell integration att

$$\int_0^1 ku'w'\,dx = \int_0^1 fw\,dx. \tag{1}$$

För godtyckligt $v = u + w$ följer nu

$$F(v) = F(u+w) = F(u) + \int_0^1 ku'w'\,dx - \int_0^1 fw\,dx + \int_0^1 k(w')^2\,dx \geq F(u),$$

(6

ty de två första integralerna tillsammans är lika med 0, och den tredje är ≥ 0.
b) Utförligt redovisat på en övning. För $k = 1$ gäller

$$\begin{aligned}||(u-U)'||^2 &= \textstyle\int_0^1 (u-U)'(u-U)'\,dx = \int_0^1 (u-U)'(u+U)'\,dx \\ &= \textstyle\int_0^1 (u')^2\,dx - \int_0^1 (U')^2\,dx = -2F(u) + 2F(U),\end{aligned}$$

eftersom $\int_0^1 (u-U)'v'\,dx = 0$ för $v \in V_h$, speciellt för U, och eftersom (tag $w = u$ i (1)) $2F(u) = ||u'||^2 - 2\int_0^1 fu\,dx = -||u'||^2$, och analogt $2F(U) = -||U'||^2$.
c) Erinrar oss (i det aktuella fallet med en rumsdimension och $k = 1$) att $||u' - U'|| \leq C||hf||$, där C är en interpolationskonstant. Detta ger $|F(U) - F(u)| \leq \frac{1}{2}C^2||hf||^2$.

4. Se t.ex. CDE sid. 80-83.

5. Se förel.ant. F5:1-6. Antag att $a(u_i, v) = l(v)$ för alla $v \in V$ för $i = 1, 2$. För *skillnaden* $u = u_1 - u_2$ gäller då p.g.a. lineariteten, $a(u, v) = 0$, motsvarande $l(v) = 0$ med $\gamma = 0$, dvs från stabilitetsuppskattningen $||u|| \leq \frac{\gamma}{\alpha}$ följer att $||u|| = 0$, dvs $u_1 = u_2$.

6. a) Multiplikation av ekvationen med $u\,dx$ och integration över $R = (-\infty, \infty)$ ger, efter partiell integration i $-\int_R u''u\,dx$,

$$\int_R \dot{u}u\,dx + \int_R (u')^2\,dx + a\int_R u'u\,dx + b\int_R u^2\,dx,$$

där $\int_R u'u\,dx = \frac{1}{2}\int_R (u^2)'\,dx = 0$, dvs $\int_R \dot{u}u\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_R u^2\,dx \leq 0$, eftersom de andra termerna är ≥ 0, dvs $||u||^2 = \int_R u^2(x,t)\,dx$ är avtagande i tiden, vilket ger den sökta olikheten.
b) Multiplikation med e^{bt} ger för $v = e^{bt}u(x,t)$ ekvationen

$$\dot{v} - v'' + av' = 0.$$

Lösningen till denna ekvation med begynnelsevärdet $\delta(x)$ (Dirac funktionen) ges av $F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x-at|^2}{4t}}$, dvs lösningen med begynnelsevärde v_0 ges av $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y,t)v_0(y)\,dy$, dvs $u(x,t) = e^{-bt}\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y,t)u_0(y)\,dy$, eftersom $v_0 = e^0 u_0 = u_0$.