PDE FÖ 2007-10-29

Beteckningar

t: tiden

x; rymdvariabler

$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

enstaka fall x, y (endimmensionella fall)

u, v, w; okända fkt

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv u_k \equiv u_{x_k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \equiv u_{kj}$$

Linjära operationer med okända fkt

1. derivator
2. $\pm$
3. multi. m kända fkt.

t. ex $\begin{cases} e^y u_{xx} + u_{yy} + e^x = 0 & \text{linjär} \\ u \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{icke-linjär} \end{cases}$

PDE av ordning 1 med 2 oberoende variabler (linjära PDE)

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

ett enkelt fall: $b \equiv 0$

$au_x + cu = f$ - en ordinär diffekv.

$u_x + hu = g$; $h = \frac{c}{a}$, $g = \frac{f}{a}$

$$u(x,y) = e^{-H(x,y)}\left(\int e^{-H(\tau,y)} g(\tau, y)\, d\tau + C(y)\right)$$

$$H(x,y) = \int h(\tau, y)\, d\tau$$

$C(y)$ är en godt. fkt.

Allmäna fallet $a, b \neq 0$

vi söker sådana nya variabler $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$

s.a i nya variabler försvinner u_η

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{aligned}\right\} \text{kedjeregeln}$$

$$a(u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x) + b(u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y) + cu = f$$

$$u_\xi(a\varphi_x + b\varphi_y) + u_\eta(a\psi_x + b\psi_y) + cu = f$$

vi vill att

$$\boxed{a\psi_x + b\psi_y = 0}$$

Vi löser $a\psi_x + b\psi_y = 0$

skriver en ODE (karaktäristiska ekv)

$a\,dy = b\,dx$ eller $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$

låt $\psi(x,y) = \gamma$, γ är godt. konst vara allmän lösning till karr. ode.

$$\psi(x, y(x)) = \gamma$$

$$\frac{d}{dx}\left(\psi(x, y(x))\right) = \frac{d}{dx}\gamma = 0$$

kedjeregel.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{b}{a} = 0 \quad ; \quad \psi_x a + \psi_y b = 0$$

Efter vi hittat ψ tar vi φ godtyckligt bara som $a\varphi_x + b\varphi_y \neq 0$

Ex) $xu_x + yu_y + u = x$ hitta allmänna lösn. där $x, y > 0$

lösn; vi söker nya variabler $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ s.a. u_η försvinner.

karr. ekv.

$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$ $x\,dy = y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln \gamma \Rightarrow y = \gamma x \Rightarrow \frac{y}{x} = \gamma$

$\eta = \psi(x,y) = \frac{y}{x}$

$\xi = \varphi(x,y) = x$ (t.ex) (nästan vad som helst) $a\varphi_x + b\varphi_y \neq 0 \Rightarrow x \cdot 1 + y \cdot 0 \neq 0$

$u_\xi \cdot \xi + 0 + u = \xi$ $\quad u_\xi + \frac{1}{\xi} u = 1$

homogena $\frac{dv}{d\xi} = \frac{v}{\xi} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{d\xi}{\xi}$ $\quad v = \frac{1}{\xi}$

$u = \frac{1}{\xi} w$

$u_\xi + \frac{u}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2} w + \frac{1}{\xi} w_\xi + \frac{1}{\xi^2} w = 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} w_\xi = 1 \quad w_\xi = \xi$

$w = \frac{\xi^2}{2} + C(\eta)$

$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi^2}{2} + C(\eta)\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C\left(\frac{y}{x}\right)$: C godt. fkt.

1. Kurvor $y(x)$ - lösn. till karr. ekv. - karraktäristiska kurvor för ekv. i vårt fall $y = \gamma x$
2. Cauchyproblemet; hitta lösn till PDE med angivna värden på en given kurva (yta)

I vårt fall; hitta lösn. $u(x,y) = y$ på kurvan $y = x^2$

$u(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} C(y/x) = x^2$, $y = x^2$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} C(x) = x^2 \Rightarrow C(x) = x\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)$

3. Cauchy-problemet kan man ställa och lösa på ickekarrakteristiska kurvor $\equiv$ sådana vilka EJ tangerar karrakteristiska kurvor

PDE av ordn. 2

$u(x)$: $x = x_1, \dots x_n$

Ekvation

$$\mathcal{L}(u) \equiv \sum_{j,k} a_{jk}(x) u_{jk} + \sum_{j,k} b_j(x) u_j + c(x) u = F$$

högerled

$a_{jk}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ koefficienter, reella fkt.

högsta koeff. lägre koeff.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots \\ a_{21} & & \vdots \\ & \ddots & \end{bmatrix}$$ koefficientmatrisen

Vi betraktar fall där $a_{jk} = a_{kj}$ ($A = A^T$, symmetrisk)

Varje PDE kan transformeras till symmetrisk form:

t.ex) $u_{xx} + u_{xy} + 3u_{yx} + u_{yy} = 0$

$a_{11} = 1$ $a_{12} = 1$ $a_{21} = 3$ $a_{22} = 1$

men $u_{xy} = u_{yx}$ $\Rightarrow$ skriver om som

$u_{xx} + 2u_{xy} + 2_{yx} + u_{yy}$

I varje pkt x har matrisen $A(x)$ egenvärden $\lambda_k(x)$ & egenvektorer $e_k(x)$

För symmetriska reella matriser:

1. $\forall \lambda_k(x) \in \mathbb{R}$
2. $\forall e_k(x) \in \mathbb{R}$
3. egenvektorer är ortogonala $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ för $k \neq j$
   normerade $\langle e_k, e_k \rangle = 1$

Klassificering

I

1. Man säger att ekvationen är av elliptisk typ i pkt x om $\forall \lambda_k(x)$ är av samma tecken & $\forall \lambda_k(x) \neq 0$
2. hyperbolisk typ om ett egenvärde har ett tecken och alla andra har annat tecken, $\forall \lambda_k(x) \neq 0$
3. parabolisk typ om bland $\lambda_k(x)$ finns några $\lambda_k(x) = 0$ och alla andra är av samma tecken.
4. ultrahyperbolisk typ: av egenv. $\lambda_k(x)$ är några (>1) positiva & några (>1) är negativa och $\forall \lambda_k(x) \neq 0$

I Vi säger att ekvationen tillhör ngn typ i hela området Ω om den tillhör den typen i $\forall$ pkt i Ω.

Ex:

i) $\Delta u = F \quad u_{11} + u_{22} + u_{33} = F \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = 0$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1 > 0 \Rightarrow$ ekv. är elliptisk typ.

ii) $t = x_4$

$u_{11} + u_{22} + u_{33} - u_4 = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ekv. är parabolisk typ

iii) $u_{11} + u_{22} + u_{33} - u_{44} = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ekv. är hyperbolisk

iv) $u_{12} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} u_{12} + \frac{1}{2} u_{21} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ekv. är hyperbolisk.

Dessa kallas kanoniska formen (formerna)

- Ekvationer med konstanta koefficienter

(konstanta koeff om det är ett homogent medium)

mha variabelbyte kan man reducera till kanoniska formen

$x = (x_1, \dots, x_n)$ gamla variabler

$\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ nya variabler

Vi söker $\xi_m = \sum e_{mj} x_j$

Vi anpassar e_{mj} s.a. i nya koeff.matrisen försvinner icke-diagonala termer.

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial u}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} = \sum \frac{\partial u}{\partial \xi_m} e_{mk}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell} = \dots = \sum_{m,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_\ell} e_{mk} e_{\ell j}$$

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{j,k} \sum_{m,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_\ell} e_{mk} e_{\ell j} a_{jk} =$$

$$= \sum_{m,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m \partial \xi_\ell} \hat{a}_{m\ell} \; ; \; \hat{a}_{m\ell} = \sum_{j,k} a_{jk} e_{mk} e_{\ell j}$$

$$\tilde{a}_{m,e} = \sum_{jk} a_{jk} e_{mk} e_{ej} = \langle Ae_m, e_e \rangle \qquad e_m = \begin{pmatrix} e_{m1} \\ \vdots \\ e_{mn} \end{pmatrix}$$

vill välja e_{mk} s.a. matrisen $\hat{a}_{me}$ blir diagonal.

vi tar e_m - egenvektorer av A : $Ae_m = \lambda_m e_m$

$$\hat{a}_{me} = \langle Ae_m, e_e \rangle = \lambda_m \langle e_m, e_e \rangle = \lambda_m \delta_{me}$$

Kanoniska formen för ekv. med variabla (glatta) koeff. för 2 ober. variabler.

1. Hyperbolisk typ

x, y ober. variabler

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \text{lägre termer} = F$$

$A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ - funktioner

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad : \lambda_{1,2} \quad (A-\lambda)(C-\lambda) - B^2 = 0$$

λ_1, λ_2 samma tecken om $B^2 - AC > 0$ elliptiskt

-"- olika -"- om $B^2 - AC < 0$ hyperboliskt

ett av egenv. lika med noll om $B^2 - AC = 0$ paraboliskt

Vi gör variabelbyte $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{xx} = \ldots = \underline{\tilde{A}u_{\xi\xi} + 2\tilde{B}u_{\xi\eta} + \tilde{C}u_{\eta\eta}} + \text{lägre termer}$$

$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x$

$$\begin{cases} \hat{A} = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 \\ \tilde{C} = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 \\ \hat{B} = A\varphi_x\psi_x + C\varphi_y\psi_y + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) \end{cases}$$

PDE FÖ 2007-11-01

$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$ + lägre termer $= F$

$$B^2 - AC \begin{cases} > 0 & \text{hyperbolisk typ} \\ = 0 & \text{parabolisk typ} \\ < 0 & \text{elliptisk typ} \end{cases}$$

$\xi = \varphi(x,y) \quad \eta = \psi(x,y)$

$\Rightarrow \tilde{A}u_{\xi\xi} + 2\tilde{B}u_{\xi\eta} + \tilde{C}u_{\eta\eta}$ + lägre termer $= F$

$$\tilde{A} = A\varphi_x\varphi_x + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y\varphi_y$$

$$\tilde{B} = A\varphi_x\psi_x + C\varphi_y\psi_y + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x)$$

$$\tilde{C} = A\psi_x\psi_x + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y\psi_y$$

① hyperb: $B^2 - AC > 0$

Vi vill försöka annulera $\tilde{A}, \tilde{C}$

$A\varphi_x\varphi_x + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y\varphi_y = 0$ delar med $\varphi_x \cdot \varphi_x$

$$\Rightarrow A + 2B\frac{\varphi_y}{\varphi_x} + C\frac{\varphi_y^2}{\varphi_x^2} = 0$$

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

$C\varphi_y + (B \pm \sqrt{B^2 - AC})_x = 0 \quad \left[\begin{array}{l} a\varphi_x + b\varphi_y = 0 \\ \text{karr ekv. } \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \end{array}\right]$

Vi tar φ, ψ som lösningar till karrekv. ($\exists$ ju 2 ekv)

$\Rightarrow 2\tilde{B}u_{\xi\eta}$ + lägre termer $= F$

(2) Parabolisk typ $B^2 - AC = 0$

vi ska annulera $\hat{A}, \hat{B}$

$$A\varphi_x\varphi_x + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y\varphi_y = 0$$

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{-B \pm 0}{C} = -\frac{B}{C}$$

$$B\varphi_x + C\varphi_y = 0 \qquad \xi = \varphi(x,y)$$

som η tar vi $\eta = \psi(x,y)$ som är oberoende av $\varphi(x,y)$

$$B\psi_x + C\psi_y \neq 0 \quad \text{eller} \quad \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$\hat{A}$ försvinner och $\hat{B}$ följer med.

(3) elliptisk typ $B^2 - AC < 0$

skriver karr. ekv.

$$A\varphi_x\varphi_x + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y\varphi_y = 0$$

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{-B \pm i\sqrt{AC - B^2}}{C} \Rightarrow C\varphi_y + (\underbrace{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}_{\text{komplexa koeff}})\varphi_x = 0$$

skriver

$$cdx = (B + \sqrt{B^2 - AC})dy$$

$\varphi(x,y) = \gamma$ - allmän lösn.

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$$

$$\xi = \varphi_1(x,y), \quad \eta = \varphi_2(x,y)$$

med sådant val av transformation $\Rightarrow$

$$\hat{B} = 0, \quad \hat{A} = \hat{B}$$

ex: $u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - y u_y = 0$

$A=1 \,.\, B = -\cos x \,,\; C = -3 - \sin^2 x$

$$B^2 - AC = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$$

hyperbolisk;

karr-ekv.

$$\varphi_x \varphi_x - 2\cos x\, \varphi_x \varphi_y - (3+\sin^2 x)\varphi_y \varphi_y$$

delar med φ_y^2

$$\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2\cos x\, \frac{\varphi_x}{\varphi_y} - 3 - \sin^2 x = 0$$

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \cos x \pm \sqrt{4} = \cos x \pm 2$$

$$\varphi_x - (\cos x \pm 2)\varphi_y = 0$$

karr ekv.

$$\frac{dy}{dx} = -(\cos x \pm 2) \qquad y = -\sin x \pm 2x$$

$$\begin{cases} \xi = y + \sin x + 2x \\ \eta = y + \sin x - 2x \end{cases}$$

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x = u_\xi(\cos x + 2) + u_\eta(\cos x - 2)$$

$$u_{xx} = \left(u_\xi(\cos x + 2)\right)_x + \left(u_\eta(\cos x - 2)\right)_x = \ldots =$$

$$= u_{\xi\xi}(\cos x + 2)\varphi_x + u_{\xi\eta}(\cos x + 2)\psi_x - u_\xi \sin x + u_{\eta\xi}(\cos x - 2)\varphi_x + u_{\eta\eta}(\cos x - 2)\psi_y$$
$$+ u_\eta(-\sin x)$$

ex $y^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$

$A = y^2$
$B = xy$
$C = x^2$

$B^2 - AC = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$

$y^2 \varphi_x \varphi_x + 2xy\, \varphi_x \varphi_y + y^2 \varphi_y \varphi_y = 0$

$$y^2 + 2xy \frac{\varphi_y}{\varphi_x} + x^2 \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{-xy \pm \sqrt{0}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$x\varphi_y + y\varphi_x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$y^2 - x^2 = \gamma$

$$\begin{cases} \xi = y^2 - x^2 = \varphi(x,y) \\ \eta = ? = x \end{cases} \qquad \hat{A} = \hat{B} = 0 \Rightarrow$$

$u_{\eta\eta}$ ∃ kvar

---

ex $(1+x^2) u_{xx} + (1+y^2) u_{yy} = 0$

$A = (1+x^2)$
$B = 0$
$C = (1+y^2)$

$B^2 - AC = -(1+x^2)(1+y^2) < 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

elliptisk typ

$(1+x^2)\varphi_x\varphi_x + (1+y^2)\varphi_y\varphi_y = 0$

ajaj!

$$1+x^2 + (1+y^2)\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 = -\frac{(1+x^2)}{(1+y^2)} \Rightarrow \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \sqrt{-\frac{(1+x^2)}{(1+y^2)}} = \frac{i\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\varphi_y \sqrt{1+y^2} - i\sqrt{1+x^2}\,\varphi_x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{-i\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \cdot i \qquad \operatorname{arcsinh}(y) = i \operatorname{arcsinh}(x) + \gamma$$

$$\underbrace{\operatorname{arcsinh}(y)}_{\varphi(x,y)} - \underbrace{i \operatorname{arcsinh}(x)}_{\psi(x,y)} = \gamma \qquad \begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

ex $\sin^2 x \, u_{xx} - 2y \sin x \, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

$B^2 - AC = (y \sin x)^2 - \sin^2 x \, y^2 = 0$ parabolisk typ

karr. ekv.

$\sin^2 x \, \varphi_x \varphi_x - 2y \sin x \, \varphi_x \varphi_y + y^2 \varphi_y \varphi_y = 0$

$\sin^2 x - 2y \sin x \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + y^2 \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 = 0$

$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{y \sin x \pm 0}{y^2} = \frac{\sin x}{y}$

$\varphi_y \cdot y - \varphi_x \sin x = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sin x} \quad -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow -\ln y = \ln(\tan(x/2)) + \gamma$

$\underbrace{-\ln y - \ln(\tan(x/2))}$ $= \gamma$

$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) = +\ln\left(y \tan \frac{x}{2}\right) \\ \eta = x \text{ (typ vad som helst)} \end{cases}$

---

ex $x u_{xx} + y u_{yy} = 0$, $x, y > 0$

$B^2 - AC = -xy < 0$ ty $x, y > 0$ elliptisk typ

$x \varphi_x \varphi_x + y \varphi_y \varphi_y = 0 \quad \left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = i\sqrt{\frac{x}{y}}$

$i \varphi_y \sqrt{y} - \varphi_x \sqrt{x} = 0$

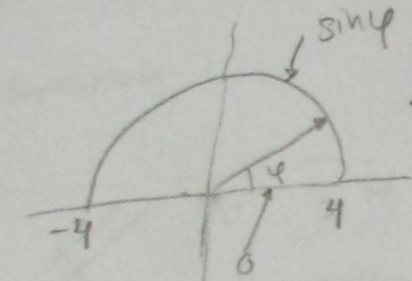
$\frac{dy}{dx} = \frac{i\sqrt{y}}{-\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{-i\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} i = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{y}}{2} i = \frac{4\sqrt{x}}{2} + \frac{\gamma}{2} \cdot 4$

$\sqrt{y} i - \sqrt{x} = \gamma$

$\xi = \varphi(x,y) = \sqrt{y}$
$\eta = \psi(x,y) = -\sqrt{x}$

FÖ PDE 2007-11-05

1a inl.uppg: Finita differensmetoden, Colton s. 173-175

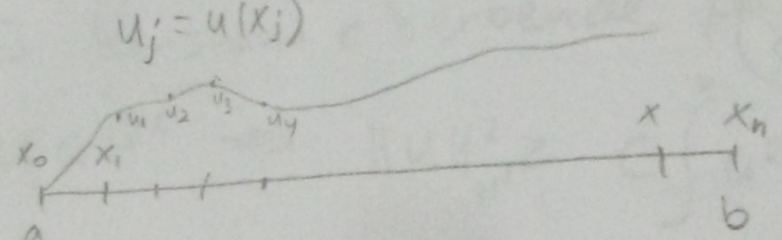


$h=1$, steg $=1$.

$\Delta u = 0$

$$-(pu')' + r(x)\,u = f \qquad \begin{array}{l} x \in (a,b) \\ p(x), r(x), f(x) \text{ fkt} \end{array} \qquad u(a)=0\,;\ u(b)=0)$$

$u_j = u(x_j)$



generaliserade, svaga lösningar

$p(x) \geq C_0 > 0$, $r(x) > 0\ \forall x$, $f \in L_2(a,b)$

Sobolevrum $H^1(a,b)$

består av fkt

$u(x)$; $u \in L_2(a,b)$; $u' \in L_2(a,b)$

$\mathring{H}^1(a,b)$; $u(a) = u(b) = 0$

antar $u(x)$ är en lösn. till vårt problem

Tar ngn annan fkt $v(x) \in \mathring{H}^1(a,b)$

mult ekv. med $v(x)$ och integrerar

$$-(p(x)u')'v + r(x)uv = fv$$

$$-\int_a^b (p(x)u')'v\,dx + \int_a^b r(x)uv\,dx = \int_a^b fv\,dx \Rightarrow$$

$$\int_a^b p(x)u'v'\,dx + \int_a^b r(x)uv\,dx = \int_a^b f(x)v\,dx \quad \text{(Integralidentitet)}$$

om u är en vanlig lösning så håller (IE) $\forall v \in \mathring{H}^1$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Vi säger att } u \in \mathring{H}^1 \text{ är generaliserad lösning}^{(GL)} \text{ till problemet} \\ \text{om (IE) gäller } \forall v \in \mathring{H}^1\end{array}\right.$

Sats GL finns alltid och $\exists$ bara en lösn,

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_a^b p(x) u'v' dx + \int_a^b r(x) uv dx$$ (definition av skalärprodukten i vårt rum)

$\mathring{H}^1$ med den produkten är ett Hilbertrum

$\left.\begin{array}{l} \|u_H\| = \langle u, u\rangle \text{ ; fullständig rum} \\ \|u_m - u_n\| \xrightarrow[m,n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \exists u : \|u_n - u\| \to 0 \end{array}\right\}$ för hilbertrum

GL på ett annat sätt:

$u \in \mathring{H}^1$ är GL om

$$\underbrace{\langle u, v\rangle = (f, v)}_{IE} \quad \forall v \in \mathring{H}^1 \qquad , \quad (f, v) = \int_a^b fv \, dx$$

Sats: Det kan finnas ≤ 1 GL.

bevis: antar $\exists$ 2 lösningar u_1, u_2

betrakta $u = u_1 - u_2$;

$\langle u, v\rangle = \langle u_1 - u_2, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathring{H}^1$

$v = u$: $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

Riesz Sats

$F(u)$ – linjär kont. funktional

$u \in H$ (Hilbertrum)

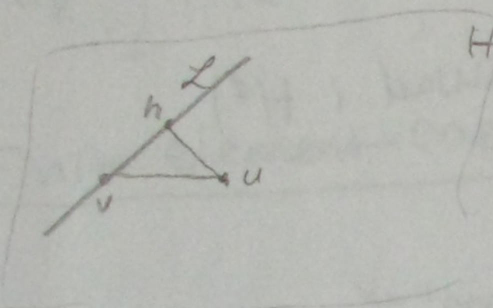
om $F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$

$|F(u)| \leq C\|u\|$

1. om $F(u)$ är en linjär kont funktion(al) $\Rightarrow \exists u_0$; $F(u) = \langle u_0, u\rangle$

2. Låt $\mathcal{L}$ vara ett slutet underrum i H och $u \in H$. Då finns $h \in \mathcal{L}$ s.a. $u-h \perp \mathcal{L}$ och $\|h-u\| \leq \|v-u\| \quad \forall v \in \mathcal{L}$

illustration;



H h-projektion av u på $\mathcal{L}$.

Poincare-Friedrichs olikhet

$\exists$ konstant c beroende på p och r s.a.

$$u \in H^1 \Rightarrow \|u\|^2_{H^1} \geq c \int_a^b u^2 dx$$

bevis

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)^2\right) = 2u(x)u'(x) \quad \text{integrerar}$$

$$u(x)^2 = 2\int_a^x u(x)u'(x) \leq 2\int_a^x |u(x)|\,|u'(x)|\,dx \leq 2\int_a^b |u(x)|\,|u'(x)|\,dx$$

Cauchy Schwarch:

$$\leq 2\left(\int_a^b u(x)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b u'(x)^2\right)^{1/2}$$

integrerar fr $a \to b$

$$\int_a^b u(x)^2 dx \leq 2(b-a)\left(\int_a^b u(x)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b u'(x)^2 dx\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\int_a^b u(x)^2} \leq 2(b-a)\sqrt{\int_a^b u'(x)^2 dx} \leq 2(b-a)\frac{1}{c_0}\left(\int_a^b p(x)u'^2 dx\right)^{1/2}, \quad p(x) \geq c_0$$

Sats: Generaliserad lösn $\exists$ alltid $\forall f \in L_2$

bevis: betraktar funktionalen

$$F(v) = (f, v) = \int_a^b f v \, dx \quad : F \text{ är linjär}$$

$$|F(v)| \le \|f\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \ (C\text{-}S) \le C \|f\|_{L_2} \|v\|_{H^1} \quad (\text{begränsad i } H^1)$$

$\exists \, u \in \mathring{H}^1$

Riez; $F(v) = \langle u, v \rangle$; u är generaliserad lösning

Hur söker man lösningen?

Vi söker en approximation till u.
u_h: det är ej en lösning utan approximerar u.

$\mathcal{L}_h$ - ett ändligt-dimmensionellt underrum i $\mathring{H}^1$
och söker u_h - projektion av u på $\mathcal{L}_h$ (enligt 2:a Riesz-satsen)

hur söker vi projektionen?

Vi tar en bas i $\mathcal{L}_h$: $\varphi_1, \dots, \varphi_N$
söker u_h som en linjärkombination, $u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$ där α_i - några (sökta) tal

Riesz: $u - u_h \perp \mathcal{L}_h$, $\langle u - u_h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{L}_h$

$$\langle u, v \rangle = \langle u_h, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{L}_h$$

$$(f, v) = \langle u_h, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{L}_h \quad (IE_h)$$

vi tar här $v = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$

$$\langle u_h, \varphi_k \rangle = (f, \varphi_k) = \int_a^b f \varphi_k \, dx$$

$$\left\langle \sum_j \alpha_j \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = (f, \varphi_k)_{k=1,\dots,N}$$

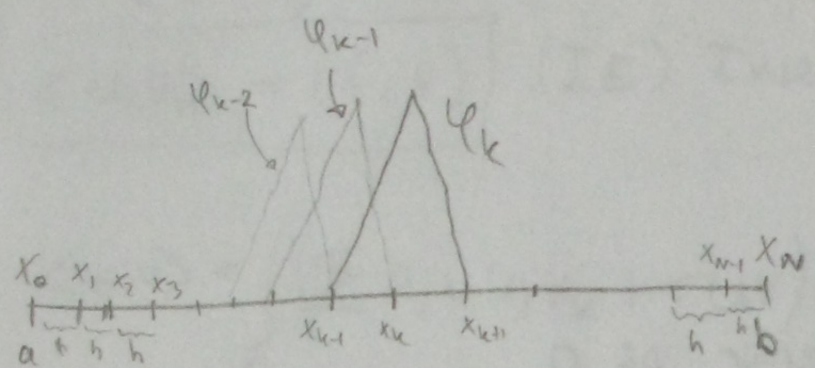
$\Rightarrow$ skalärprodukten linjär $\Rightarrow$

$$\sum_j \alpha_j A_{jk} = B_k$$

$$A_{jk} = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \int_a^b \left(p\varphi_j' \varphi_k' + r \varphi_j \varphi_k \right) dx \quad \text{(styvhetsmatris)}$$

$$B_k = \int_a^b f \varphi_k \, dx \quad \text{(lastvektor)}$$

Finita element-metoden - ett speciellt val av φ_k



$$h = \frac{b-a}{N}$$

φ_k - styckvis linjär fkt $\begin{cases} \varphi_k(x_k) = 1 \\ \varphi_k(x_j) = 0, \ j \neq k \end{cases}$

$\forall A_{jk} = 0$ utom $j = k-1, k, k+1$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & 0 \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \\ 0 & & A_{43} & & \ddots \end{bmatrix}$$

Felet i avordningen $O(h)$

adaptiva FEM

p liten $\Rightarrow$ elementen små ($x_k - x_{k-1}$ litet)

r stor $\Rightarrow$ —— " ——

FEM - för elliptiska ekvationer

$\Omega \in \mathbb{R}^N$, Ω begränsad ; $\Gamma = \partial\Omega$ (randen)

$$-\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} + r(x) u = f$$

löser med Dirichlet randvillkor ; $u(x) = 0$ om $x \in \Gamma$

divergentformen

a_{jk}; alla egenvärden har samma tecken (positiva) eller att matrisen (a_{jk}) är positivt definit;

$$\sum_{jk} a_{jk}\xi_j\xi_k \geq \gamma \sum \xi_j^2 \quad \gamma > 0 \quad \forall \xi_j, \; r(x) \geq 0$$

Generaliserade lösningen

H^1: $u \in L_2(\Omega)$: $u_j \in L_2$ t.ex $j = x$, $u_x \in L_2$

$\mathring{H}^1$: $u \in H^1$; $u(x) = 0$, $x \in \Gamma = \partial\Omega$

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega a_{jk} u_j v_k \, dx + \int_\Omega r(x) u v \, dx$$

tar $v \in \mathring{H}^1$, mult med ekv. & integrerar på Ω.

$$-\int_\Omega \sum \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \cdot v \, dx + \int_\Omega r(x) u(x) v(x) \, dx = \int_\Omega f v \, dx \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \cdot v = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j} v\right) - a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]$$

$$\phi_k = \sum a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j} v \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$-\int_\Omega \nabla \cdot \phi \, dx + \int_\Omega \sum a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

gauss: $\int_\Omega \nabla \cdot \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} (\phi, n(x)) \, dx = 0$ (ty $\Gamma = \partial\Omega = 0$, $v = 0$ på randen)

$\Rightarrow$

$$\int_\Omega \sum a_{jk} u_j v_k \, dx + \int_\Omega r(x) u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{IE} \qquad u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \; v_k = \frac{\partial v}{\partial x_k}$$

GL: sådan fkt $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ s.a IE gäller $\forall v \in \mathring{H}^1(\Omega)$

<u>Sats</u>: Den svaga lösningen finns för varje $f \in L_2$ och $\exists$ endast 1

kortare form av IE; $\langle u, v\rangle_{H^1} = (f, v) \quad \forall v \in \mathring{H}^1$

FÖ PDE 2007-11-08

$$\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + r(x)u = f \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ \Gamma = \partial\Omega$$

(elliptisk??) $\quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma$

$$\sum a_{jk} \xi_j \xi_k \geq \gamma \sum |\xi_j|^2 \qquad r(x) \geq 0$$

Soboleurum $H^1(\Omega)$; $\mathring{H}^1(\Omega)$

$v(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$

$\boxed{\langle u, v \rangle = (f, v)}$ (IE) Integral Identitet (E)

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left(\sum a_{jk} u_j v_k + ruv \right) dx$$

$$(f, v) = \int_\Omega f v \, dx$$

$u \in \mathring{H}^1$ är en svag (generaliserad) lösning om IE gäller $\forall v \in \mathring{H}^1$

---

1. Lösningen finns för $\forall f \in L_2(\Omega)$
2. $\exists$ bara en lösning
3. Hur söker man approximativa lösningen?

Väljer ngt $\mathcal{L}_h$-underrum i $\mathring{H}^1$ med ändliga dimensioner
Som approx. lösn. $u_h \in \mathcal{L}_h$ tar vi projektionen av u på $\mathcal{L}_h$

$\langle u_h - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{L}_h$ $\quad$ skalärprodukt linjär

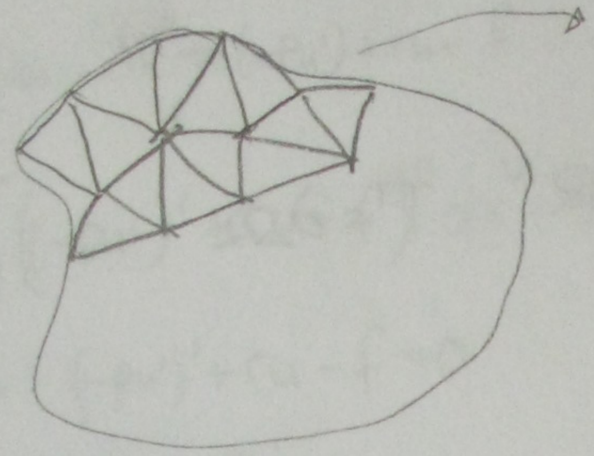
$\langle u_h, v \rangle = \langle u, v \rangle = (f, v) \quad \forall \in \mathcal{L}_h \Rightarrow \langle u_h, v \rangle = (f, v)$

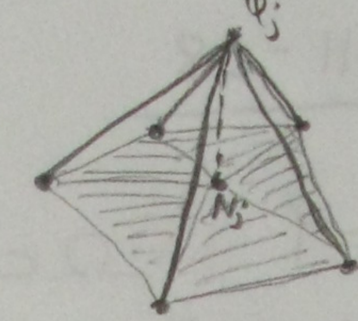
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bas i $\mathcal{L}_h$

Söker $u_n = \sum \alpha_k \varphi_k$ sätter in i formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \ldots, n \qquad , v = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

system för att söka a_k





$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij}$

Anm: om vi har icke-homogena randvillkor

$u(x) = g(x)$, $x \in \Gamma$

tar ngn $u_0 \in H^1$, s.a. u_0 satisfierar randvillkoren.

Söker $u(x)$ som $u_0(x) + w(x)$

$\langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u_0, v \rangle$

$\langle u, v \rangle = (f, v)$

$\Rightarrow$ Söker $w \in \mathring{H}^1$ s.a $\langle w, v \rangle = (f, v) - \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in \mathring{H}^1$

IE för ohomogena randvillkor

2. Fråga: Är den svaga lösningen en vanlig lösning?

Svar: om den svaga lösningen 2 ggr deriverbar, så är den starka lösningen.

$(p(x)u')' + r(x)u = f \qquad u(a) = u(b) = 0$

$$\int_a^b (pu'v' + ruv)\,dx = \int_a^b fv\,dx \quad \forall v \in \mathring{H}^1$$

Partiellintegrera (antar vi vet att u är god fkt)

$$\int_a^b ((-pu')' + ru - f)v\,dx = 0 \quad \forall v \in \mathring{H}^1$$

vi approximerar $(-pu')' + ru - f$ med glatta fkr $v_k \in \mathring{H}^1$ i L_2-normen.

för varje v_k har vi $\int ((-pu')' + ru - f)v_k = 0$

då $k\to\infty$, $v_k \to (-pu')' + ru - f$

$$\Rightarrow \int \left((-pu')' + ru - f\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow (-pu')' + ru - f = 0$$

3. andra randvillkor

<u>Ex</u>: <u>Neumanrandvillkor</u>

$$-(pu')' + r(x)u = f \quad , x \in (a,b)$$

$$u'(a) = u'(b) = 0 \qquad , r(x) \geq r_0 > 0$$

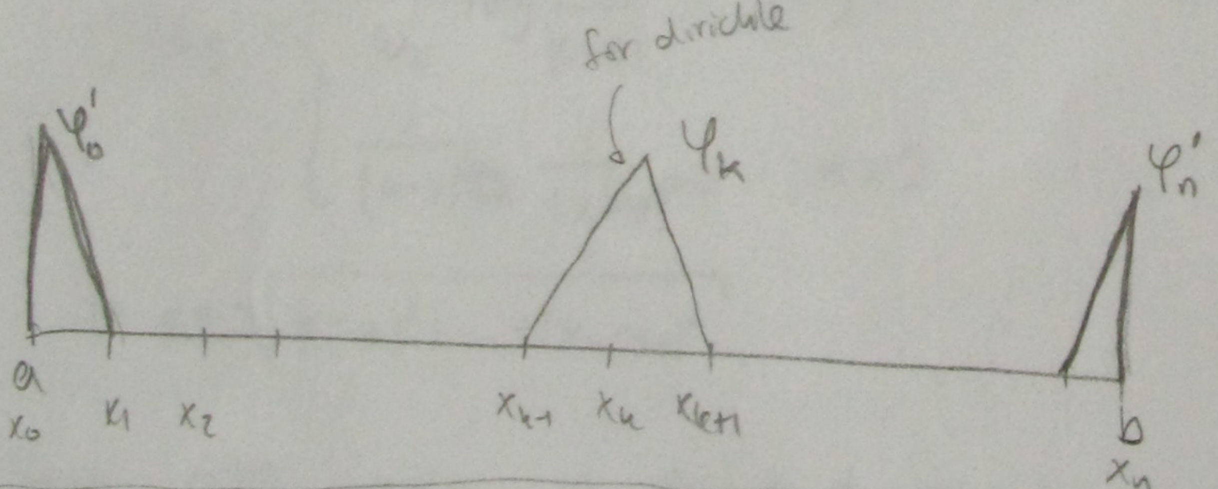
$$H^1(a,b) \quad \langle u,v \rangle = \int_a^b (pu'v' + ruv)\,dx$$

tar $v \in H^1(a,b)$, multi. med ekv.

$$\int_a^b -(pu')'v\,dx + \int_a^b r(x)\,uv\,dx = \int_a^b fv\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b pu'v'dx - p(b)\underset{\overset{\|}{0}}{u'(b)}v(b) - p(a)\underset{\overset{\|}{0}}{u'(a)}v(a) + \int_a^b ruv\,dx = \int_a^b fv\,dx$$

$$\Rightarrow \langle u,v \rangle = (f,v) \quad u \in H^1 \text{ svag lösn.}$$



φ_0', φ_n' tar ansvar för de nya randvillkoren.

<u>0→1</u> $f(x) = x^\alpha$ vilka α $f \in L_2$?

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx < \infty \qquad \int_0^1 x^{2\alpha}dx < 0 \qquad 2\alpha > -1$$

2. $f(x)=x^{\alpha}$ $f\in H^1$

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ $(f')^2=\alpha^2 x^{2\alpha-2}$ $\alpha^2\int x^{2\alpha-2}dx<\infty$

$2\alpha-2>-1 \Rightarrow 2\alpha>1 \Rightarrow \underbrace{\alpha>\frac{1}{2} \ \& \ \alpha=0}$

$f(x)=x^{\alpha}\in H^1$ för $\alpha=0$ & $\alpha>\frac{1}{2}$

3. $f\in H^1(a,b)$, $g\in C^1(a,b)$

$fg\in H^1$??

$fg\in L_2$, $(fg)'=\underbrace{f'}_{\in L_2}\underbrace{g}_{\text{begr}}+\underbrace{f}_{\in L_2}\underbrace{g'}_{\text{begr}} \Rightarrow \underline{fg\in H^1}$

4. $f,g\in H^1$ $fg\in H^1$

$(fg)'=f'g+fg'$

g är begränsad

FÖ PDE 2007-11-12

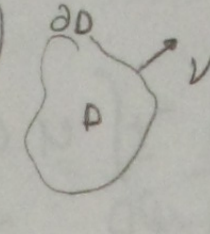
$$\omega_n = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\pi^{n/2}$$

Laplace $\Delta u = 0$ $\quad u_{11} + u_{22} + \dots + u_{nn} = 0$

Poisson $\Delta u = f$

vi betraktar Laplace!

$$\int_D (u\Delta v + \nabla u \nabla v)\,dx = \int_{\partial D} u v_\nu \, ds \quad (\text{I Green})$$



$$v_\nu = \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial D} (u v_\nu - u_\nu v)\,ds \quad (\text{II Green})$$

$$\int (F, G)\,dr = \iint \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ex på harmoniska fkt:

1. konstanter, linjära fkt
2. $(x_1^2 - x_2^2)k \quad , x_1 x_2$

Fundamentallösning till Δ

$\phi(x,y)$: $x, y \in \mathbb{R}^n$; $x \neq y$

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} \log \frac{1}{|x-y|} & , n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & , n>2 \end{cases}$$

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

<u>Sats</u>: om $x \neq y$, $\Delta_x \phi = \Delta_y \phi = 0$

Viktiga formler

Integralrepresentation

för glatta fkt: $(\partial D \in C^1)$

$$\int_D \Phi(x,y)\,(-\Delta u(y))\,dy = +\int_{\partial D} u\,\Phi_{\nu(y)}(x,y)\,ds - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi(x,y)\,ds + u(x) \quad , x \in D$$

sid 153

Integralrepresentation för harmoniska fkt $\Delta u = 0$

$$u(x) = -\int_{\partial D} u\,\Phi_{\nu(y)}(x,y)\,ds + \int_{\partial D} u_\nu \Phi(x,y)\,ds \quad , x \in D$$

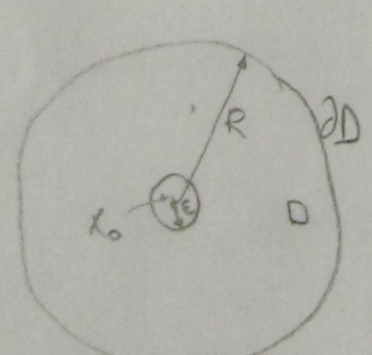
Egenskaper

① $u = 1$, v harmonisk ; I:a Green ;
om v harmonisk så

$$\int_{\partial D} v_\nu\,ds = 0$$

② medelvärde : u är harmonisk i $|x - x_0| \le R$ (klot, radie R, centrum x_0)

så $u(x_0) = \dfrac{1}{R^{\omega_{n-1}}\omega_n} \displaystyle\int_{\partial D} u(y)\,dy$



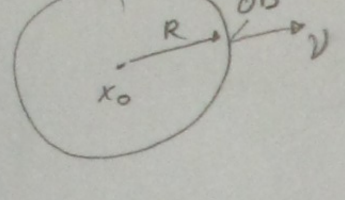
$D_\varepsilon = \{\varepsilon \le |x - x_0| \le R\}$

$\Phi(x_0, y)$ är harmonisk då $x \in X_\varepsilon$, u harmonisk

anv. II Green , $u(y)$, $v(y) = \Phi(x_0, y)$ i D_ε

$$\int_{\partial D}\Big(u\,\Phi_\nu(x_0,y) - u_\nu\,\Phi(x_0,y)\Big)\,dS + \int_{\partial D_\varepsilon}\Big(u\,\Phi_\nu(x_0,y) - u_\nu\,\Phi(x_0,y)\Big)\,dS$$

$$\int_{\partial D} u\,\Phi_\nu(x_0,y)\,dS + \int_{\partial D_\varepsilon} u\,\Phi_\nu(x_0,y)\,dS = 0$$



$$\Phi_{\nu(y)} = -\frac{1}{|x_0-y|^{n-1}\,\omega_n} = -\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n R^{n-2}}$$

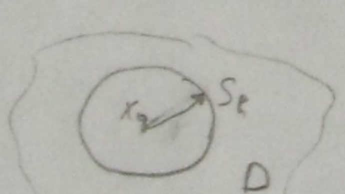
$$u(x_0) = -\int_{\partial D} u\,\Phi_{\nu(y)}(x_0,y)\,dy = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial D} u\,dS \Rightarrow$$ vi har egenskap 2

(har anv. Integralrep för $\Delta u = 0$ och egenskap 1)

3. Maximumprincip: om $u(x)$ är harmonisk i omr. D och har sitt maximalvärde i ngn inre pkt i D, så $u(x) = \text{konst}$.

om $u(x)$ satisfierar medelvärdesegenskapen för varje klot D så gäller max. princ. för $u(x)$.

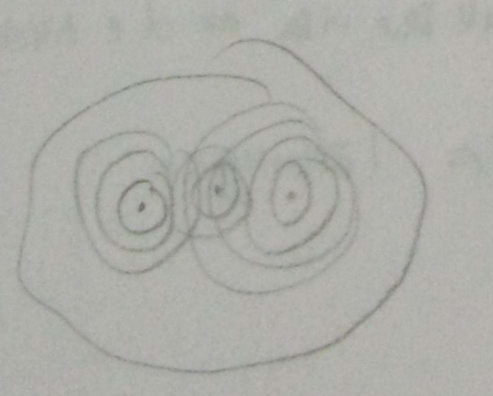
B. antar



enl mvs. $$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S_R} u(y)\,dS \leq$$

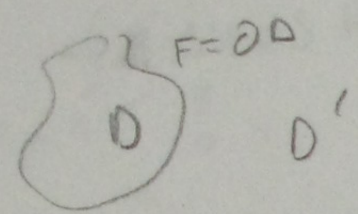
$$[u(y) \leq u(x_0)] \quad \overset{=}{\leq} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S_R} u(x_0)\,dS$$

men det råder likhet. det gäller endast om $u(y) = u(x_0)$, $y \in S_R$



konstant på randen. Gör olika S_R och täcker upp hela omr. D.

4. om $u(x)$ är harmonisk i D så är u oändligt deriverbar i inre pkter i D.



$\Delta u = 0$, $x \in D$; $u|_\Gamma = f(x)$; inre Dirichletproblem

— " — $x \in D'$; $u|_\Gamma = f(x)$; yttre — " —

— " — $x \in D$; $u_\nu|_\Gamma = g(x)$; inre Neuman problem

— " — $x \in D'$ — " — ; yttre — " — ———

1 <u>om ∃ lösn för inre Dir så är den bara 1</u>

Antag ∃ 2 olika lösn, u_1, u_2

$u = u_1 - u_2$

$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 - 0 = 0$

$u|_\Gamma = u_1|_\Gamma + u_2|_\Gamma = f - f = 0$

om $u(x)$ är positiv ngnstans så har den positivt max inne i D. Men maxprincipen säger då att $u = 0$

(om $u < 0$ ngnstans betraktar vi $-u$)

<u>Neuman</u>: $\Delta u = 0$ i D ; $u_\nu|_\Gamma = g(x)$

1. För att lösningen skall finnas så krävs $\int_{\partial D} g(x)\,dS = 0$

<u>bevis</u>: För harm fkt $\int_{\partial D} u_\nu\,dS = 0$ (nödvändigt, skall sen visa att de tillräckl

2. om u_1 är en lösn till Neumann, så alla andra lösningar ges av $u_2 = u_1 +$ konstant

låt u_1, u_2 - lösn , betr $u = u_1 - u_2$, $\Delta u = 0$ $\quad u_\nu|_{\partial D} = 0$

I Green för $v = u$

$$-\int_D u \underbrace{\Delta u}_{=0} \, ds + \int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dx = -\int_{\partial D} u \underbrace{u_\nu}_{=0} \, ds \Rightarrow \int_D \sum u_k^2 \, dx = 0$$

$\Rightarrow u_k = 0$; $\forall$ derivator av $u = 0 \Rightarrow u$ = konst.

RÖ PDE 2007-11-12

1 $\Delta u + q(x)u = 0 \quad x \in D \quad , q \in C^1(D)$

$u_\nu = f(x) \quad , q(x) < 0$

vis att om ∃ lösn är den unik.

$u = u_1 - u_2$, u_1, u_2 lösningar som är olika

I Green $v = u$

$$\int_D u \Delta u \, dx + \int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial D} u \cdot u_\nu \, dS \Rightarrow$$

$$\int_D \underset{\overset{\vee|}{0}}{(-q) u^2} dx + \int \underset{\overset{\vee|}{0}}{\nabla u \nabla u} \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int (-q) u^2 dx = 0 \Rightarrow u = 0$$

$\Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow$ ∃ endast 1 lösning om en lösn existerar

---

3) $\Delta u = u^3$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$

$u = 0$ på ∂D

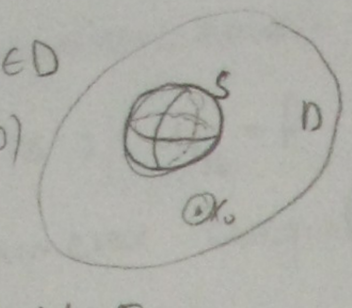
$$\int_D \Delta u \cdot u \, dx + \int_D \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial D} u u_\nu \, dS \Rightarrow$$

$$\int_D \underset{\overset{\vee|}{0}}{u^4} dx + \int \underset{\overset{\vee|}{0}}{\nabla u \cdot \nabla u} \, dx = 0 \quad \text{ty } u|_{\partial D} = 0$$

$$\Rightarrow \int u^4 dx = 0 \Rightarrow u = 0$$

5) $u(x), x \in D$

$u \in C^2(D)$



$\int_S u_\nu \, ds = 0$

Visa att u är harmonisk

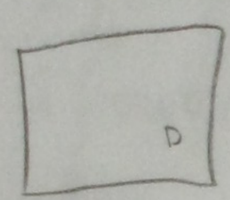
vi vill: $\Delta u = 0$

Antag att $\Delta u \neq 0$ ngnstans, t.ex $\exists\, x_0$; $\Delta u(x_0) > 0$

$\exists$ en omgivning D_ε av x_0 där $\Delta u > 0$ första green $v = 1$

$\Rightarrow \underbrace{\int_{D_\varepsilon} \Delta u \, dx}_{> 0} = \underbrace{\int_{S_\varepsilon = \partial D_\varepsilon} u_\nu \, ds}_{= 0}$ motsägelse $\Rightarrow \underline{\Delta u = 0}$

6) D:



$|x| < 1$
$|y| < 1$

$u(x)$; $\Delta u = -1$

$u = 0$ på $|x| = |y| = 1$

hitta övre & undre gräns för $u(0,0)$

Betr. $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow \Delta v = 0$

$v(0,0)$ ligger enl. maxprincipen ligger enl. maxprincipen mellan det största och det minsta värdet av $v(x,y)$ på randen,

på ∂D $v(x,y) = \frac{x^2+y^2}{4}$ max $\frac{1}{2}$, min $= \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} u(0,0) \leq \frac{1}{2} \\ u(0,0) \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$-\frac{1}{4} \leq u(x,y) \leq \frac{1}{2}$

7.1 D begränsat, enhelt smhg, $\partial D \in C^2(D)$

$\Delta u = 0$; $u|_{\partial D} = f$

u minimerar integralen

$I(v) = \int_D |\nabla v|^2 dx$ bland fkt v ; $v|_{\partial D} = f$

$v = u + t\varphi \quad \varphi \in C^1 : \varphi|_{\partial D} = 0$

$H(t) = I(u + t\varphi)$

$H(t) = \int_D \nabla(u+t\varphi)\cdot\nabla(u+t\varphi)\,dx = \int_D |\nabla u|^2 dx + 2\int_D \nabla u \nabla\varphi\, dx\, t + t^2 \int_D |\nabla\varphi|^2 dx$

$H'(t) = 2\int_D \nabla u \nabla \varphi\, dx + 2t\int_D |\nabla\varphi|^2 dx$

$H'(0) = 2\int_D \nabla u \nabla \varphi$

I Green

$\int_D \nabla u \nabla \varphi\, dx = -\underbrace{\int_D \Delta u \varphi\, dx}_{= 0} + \underbrace{\int_{\partial D} u_\nu \varphi\, dx}_{= 0}$ ty

$H''(0) = 2\int |\nabla\varphi|^2 dx > 0 \quad \Rightarrow$ I minimeras

jmf. energin minimeras i fält

<u>Greenfunktion</u>; Inre dirichlet: D: $\Delta u = 0$: $u|_{\partial D} = f$

$\phi(x,y)$ - fundamentallösning, hjälpfkt $g(x,y)$

<u>Krav</u> 1, För varje x, $g(x,y)$ är harmonisk i <u>y</u>-variabel i D

2, för $\forall x \in D$ och $\forall y \in \partial D$, $g(x,y) = -\phi(x,y)$

$G_D(x,y) = \phi(x,y) + g(x,y)$ kallas för Greenfkt för Dirichletproblem i D,

hur löser man Dir. problem m Greenfkt?

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(x,y)\, u_\nu(y)\, dS - \int_{\partial D} \phi_\nu(x,y)\, u(y)\, dS$$

adderar $\Longrightarrow$

II Green; $u, g(x,y)$

$$0 = \int_{\partial D} g(x,y)\, u_\nu(y)\, dS - \int_{\partial D} g_\nu(x,y)\, u(y)\, dS$$

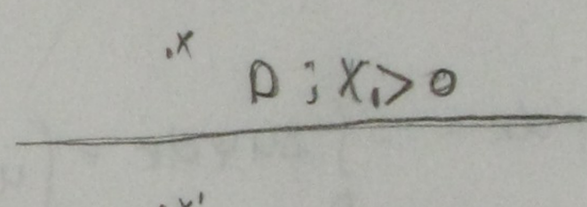
$$\Longrightarrow \quad u(x) = \int_{\partial D} \underbrace{\left(\phi(x,y) + g(x,y)\right)}_{=0 \text{ ty } G(x,y)|_{\partial D} = 0} u_\nu(y)\, dS - \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \underbrace{\left(\phi(x,y) + g(x,y)\right)}_{= G(x,y)} dS$$

$$u(x) = -\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, u(y)\, dS = -\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, f(y)\, dy$$

Exempel på Greenfkt

1. halvrummet,

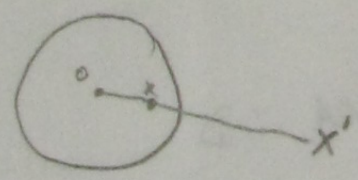
$\mathbb{R}^n$; $x_1, \dots, x_n$



$$g(x,y) = -\phi(x', y) \quad ; \; x' = -x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\left(|x-y|^{-n+2} - |x'-y|^{-n+2}\right), & n > 2 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\left(\ln \dfrac{1}{|x-y|} - \ln \dfrac{1}{|x'-y|}\right) \end{cases}$$

2. Klot ; $|x| < a$



$$x' = \frac{a^2}{|x|^2} x \quad \Big| \quad x' \text{ symmetrisk till } x \text{ map sfären } \{|x| < a\}$$

$$g(x,y) = -\phi\left(|x| y, \frac{x'}{|x|}\right)$$

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x'-y|^{n-2}} \left(\frac{a}{|x|}\right)^{n-2} \quad \text{Greenfkt på sfären}$$

$$\frac{-\partial G}{\partial \nu_y} = \frac{a^2 - |x|^2}{\omega_n |x-y|^n} \; ; \; u(x) = \int_S \frac{1}{\omega_n} \frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^n} f(y)\, dS$$

Greenfkt för Neumann:

$\Delta u = 0 \quad u_\nu|_{\partial D} = f(x)$

$n(x,y)$, för x fixerade i D, $n(x,y)$ är en harm. fkt.

när $y \in \partial D$ $\quad \frac{\partial n(x,y)}{\partial \nu_y} = -\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial \nu_y} - \frac{1}{S}$ $\quad$ S=arean av randen

$\Rightarrow \quad G_N(x,y) = \phi(x,y) + n(x,y)$, Greenfkt för Neumannproblem

$u(x) = \int_{\partial D} f(x)\, G_N(x,y)\, dS$

För halvrummet och för sfären $n(x,y) = -g(x,y)$

FÖ PDE 2007-11-15

$G_D(x,y) = \phi(x,y) + g(x,y)$; $g(x,y)$ är harm. i D i y-variabel

$G_D(x,y) = 0$, y på randen $\forall x \in D$; $g(x,y) = -\phi(x,y)$, $y \in \partial D$

$\Delta u = 0$ i D $u(x) = f(x)$, $x \in \partial D$

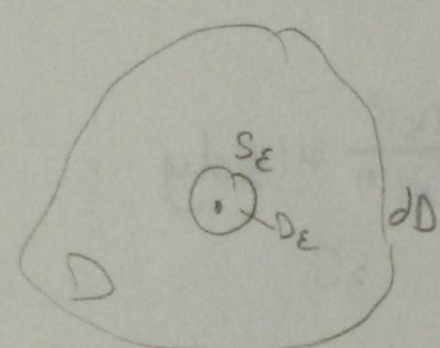
$$u(x) = \int_{\partial D} -\frac{\partial G}{\partial \nu_y} f(y)\, dy$$

sats 32, sid 168 $G(x,y) = G(y,x)$

Problem; Visa att om $x, y \in D$, $G_D(x,y) > 0$

Lösn: vad vi vet om G

1. harm. i $y \neq x$
2. $G(x,y) = 0$, $y \in \partial D$



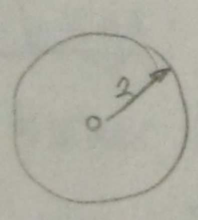
$y \in D_\varepsilon$ på S_ε

$\partial D = \phi + g$

$\phi(x,y) \to +\infty$ då $|x-y| \to 0$

$G > 0$, $y \in S_\varepsilon$

$G > 0$ på S_ε, $G = 0$ ∂D



Låt u vara en harm. fkt i D, $u \geq 0$

Låt $\int_D u(x)\, dx = 1$

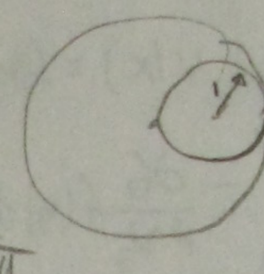
$u(1,0) < ?$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y-x|=r} u(y)\, ds$$

$$u(x) r = \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x|=r} u(y)\, ds$$

$$\int_{|x-y|<R} u(y)\,dy \overset{\text{pol}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,s)\,r\,dr\,dS = \int_0^R \left(r \int_0^{2\pi} u(r,s)\,dS \right) dr \overset{\text{mvs}}{=}$$

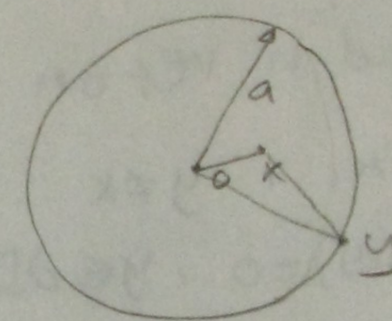
$$= \int_0^R \left(r^2 2\pi u(x) \right) dr = \frac{2R^3}{3} 2\pi u(x)$$



$$u(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|x-y|\leq R} u(y)\,dy \quad \leq \quad \frac{3}{4\pi^2} \int_{|y|<2} u(y)\,dy \leq \frac{3}{4\pi}$$

För sfären med centrum 0, radie a

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_a} = \frac{a^2 - |x|^2}{|y-x|^n} \frac{1}{\omega_n}$$



$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=a} \frac{a^2-|x|^2}{|y-x|^n} u(y)\,dy$$

$$a - |x| \leq |x-y| \leq a + |x|$$

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=a} \frac{a^2-|x|^2\, u(y)}{(a-|x|)^n} dy = \frac{a^2-|x|^2}{(a-|x|)^n} a^{n-2} u(0)$$

$$u(x) \geq \frac{a^2-|x|^2}{(a+|x|)^n} a^{n-2} u(0)$$

Harnack-olikheterna.

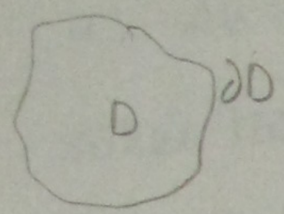
$$\frac{a^2-|x|^2}{(a+|x|)^n} a^{n-2} \leq \frac{u(x)}{u(0)} \leq \frac{a^2-|x|^2}{(a-|x|)^n} a^{n-2}$$

Låt u vara >0 och harmonisk i hela rummet. $\forall a$

Låt $a \to \infty \Rightarrow u(x) = u(0)$

Liouvillesatsen

Potentialteori



$h(x)$, $x \in D$

$\left.\begin{matrix}\varphi(x) \\ \psi(x)\end{matrix}\right\} x \in \partial D$

1. Volympotential (Newtonpotential)

$$V(x) = \int_D h(x)\,\Phi(x,y)\,dy$$

2. Singellagerpotentialen

$$SL(x) = \int_{\partial D} \varphi(y)\,\Phi(x,y)\,dS$$

3. Dubbellagerpotential

$$DL(x) = \int_{\partial D} \psi(y)\,\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS$$

Sats: $V(x)$ ger en lösning till Poissonekvationen

$\Delta V(x) = h(x)$ i D (utan randvillkorsmatch)

viktigt: om vi löser $\Delta u = h$, $u|_{\partial D} = f$

söker lösn. på formen

$u(x) = V(x) + w(x)$

då kommer vi att erhålla $\Delta w = \Delta u - \Delta V = h - h = 0$

och $w|_{\partial D} = u|_{\partial D} - V|_{\partial D} = f - V|_{\partial D}$

$DL(x)$

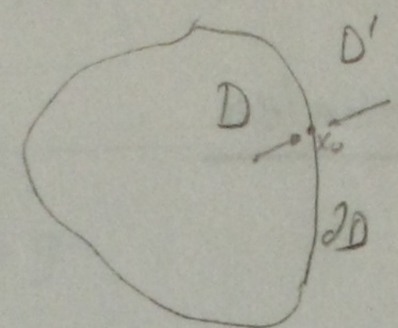
$\Phi(x,y)$ är harm i x för varje fixt y, $x \neq y$

$\Phi_{\nu_y}(x,y)$ också harm.

$\Rightarrow DL(x)$ är harm i D och utanför D

men diskont på ∂D.

Låt $x_0 \in \partial D$



$$DL_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} DL(x)$$

$$DL_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D'}} DL(x)$$

om $\Psi(y)$ kontin

$$\left.\begin{aligned} DL_+(x_0) - DL(x_0) &= -\tfrac{1}{2}\Psi(x_0) \\ DL_-(x_0) - DL(x_0) &= \tfrac{1}{2}\Psi(x_0) \end{aligned}\right\}$$ Gauss formel (formler?)

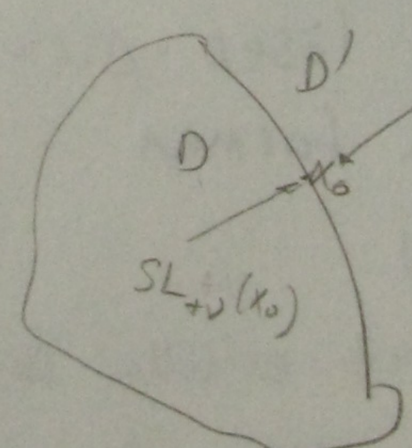
Fysikaliskt; dipolngt...

$SL(x)$

$SL(x)$ harm i D och D'

kontinuerlig på ∂D

$\frac{\partial SL(x)}{\partial \nu}$ är ej kontin på ∂D.



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} SL_\nu(x) = SL_{+\nu}(x_0) \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D'}} SL_\nu(x) = SL_{-\nu}(x_0)$$

$$\left.\begin{aligned} SL_{+,\nu}(x_0) - SL_\nu(x_0) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x_0) \\ SL_{-,\nu}(x_0) - SL_\nu(x_0) &= -\tfrac{1}{2}\varphi(x_0) \end{aligned}\right\}$$ & så gauss

Integralekvationer av potentialteori

u; $\Delta u = 0$ i D, $u|_{\partial D} = f$

söker lösn. på formen

$u(x) = DL(x)$ med någon okänd $\Psi(x)$, på ∂D.

$x_0 \in \partial D$; $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} u(x) = f(x_0) \overset{\text{Gauss}}{=} DL_+(x_0) = DL(x_0) - \frac{1}{2}\Psi(x_0)$

$$\boxed{\int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_y} ds - \frac{1}{2}\Psi(x) = f(x)}$$

Ekvation av potentialteori för inre dirichletproblem

Neumann $\quad \underset{i\,D}{\Delta u = 0}$, $u_\nu = g$

Söker lösn på formen

$u(x) = SL(x)$ med okänt $\varphi(x)$

$x_0 \in D$: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} u(x) = g(x_0) = SL_{+\nu}(x_0) \overset{\text{gauss}}{=} SL_\nu(x_0) + \frac{1}{2}\varphi(x_0)$

$$\boxed{\int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_x} ds + \frac{1}{2}\varphi(x) = g(x)}$$

Fö PDE 2007-11-19 avskrivning (sov 1:a h)

Externa problem

Dirichlet - DE $\frac{\psi(x)}{2} + \int_{\partial D} \psi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_y} dS = f(x)$, $\Delta u = 0$ i D' : $u|_{\partial D} = f(x)$

Neumann - NE $-\frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_x} dS = g(x)$, $\Delta u = 0$ i D' ; $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = g(x)$

Fredholmteori

$\int_S \psi(y) K(x,y) dS + \lambda \psi(x) = f$ (I) (I_h om $f=0$)

$\int_S \varphi(x) K(y,x) dS + \bar{\lambda} \varphi(x) = g$ (II) (II_h om $g=0$)

egenskaper av kärnan $K(x,y)$ som krävs;

- $K(x,y)$ är begränsad för $|x-y| \geq \varepsilon$ för $\forall \varepsilon > 0$
- För x nära y: $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n+1+\delta}$, $\delta > 0$

Om dessa är uppfyllda kallas $K(x,y)$ för Fredholmkärna

Fredholms sats 1

Följande påståenden är ekvivalenta

- I_h har bara 0 som lösning
- II_h har ——— " ———
- I har en lösning för varje f
- II ——— " ——— g

Talet λ för vilket Fr 1 inte gäller kallas egenvärdet.

Fr 2| a) Det kan finnas bara en följd av λ_k av egenvärden av I_n eller II_n : $\lambda_k \to 0$

b) λ egenvärde av $I_h \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ egenvärde av II_h

c) Antalet lin. oberoende lösningar Ψ till I_h med egenvärde λ = antalet lin. oberoende lösn φ till II_h med egenvärde λ

Fr 3| I är lösbar för givet f $\Leftrightarrow$ f är ortogonal till alla lösningar till II_h

II är lösbar för g $\Leftrightarrow$ g är ortogonal till alla lösn till I_h.

1, Kärnan $K(x,y) = \dfrac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu_y}$ är Fr-kärna om ∂D glatt yta.

* DI och NE $\lambda = -\frac{1}{2}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ är inte ett egenvärde (Fr 1 används)

$DI_h : -\dfrac{\Psi(x)}{2} + \displaystyle\int_{\partial D} \Psi(y) K(x,y)\, dS = 0$, antag $\exists\ \Psi(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ DL ger en lösn till $\Delta u = 0$ $u|_{\partial D} = 0$

Vi bevisade att bara $u = 0$ är lösn.

Fr 1 $\Rightarrow$ Integralekvationer för DI, NE har 1 lösn för varje f,g $\Rightarrow$ DI-problem och NE-problem har en lösn för $\forall$ f,g.

FÖ PDE 2007-11-19

forts:

* * (NI + DE) $\lambda = \frac{1}{2}$

NI_h har några lösningar utom 0

$\Delta u = 0 : u_\nu|_{\partial D} = 0$ har $u = 1$ som lösn (varje konstant)

$\lambda = \frac{1}{2}$ är ett egenvärde

Djupare analys:

DE_h har endast $\psi = 1$ som lösning

NI_h har ngn fkt φ_0 som lösning

FR.3:

$\Rightarrow$ NI är lösbar för $g: \int_{\partial D} g\,dS = 0$;

DE är lösbar för $f: \int_{\partial D} f\varphi_0\,dS = 0$

$$\lambda\psi(x) + \int_{\partial D} \psi(y) K(x,y)\,dS = f$$

$\mu \neq 0$ ekvivalenta

$$\psi(x) + \mu\int_{\partial D} \psi(y) K(x,y)\,dS = f$$

dåliga μ kallas för karakteristiska värden

[om $\lambda = 0$ Fredholmssats 3 av 1:a typ, $\lambda \neq 0$ 2:a typen
Fredholmsekv. gäller endast för 2:a typ.]

Uppg 3a) sid 237

$\Delta u = 0$ i D

$u_\nu + u|_{\partial D} = f$

Söker lösn på formen (singellagerpotential)

$$SL = \int_{\partial D} \varphi(y)\,\Phi(x,y)\,dS$$, kont på ∂D

$$\frac{\partial SL(x)}{\partial \nu_x} : \frac{\partial SL(x)}{\partial \nu_x +}(x_0) = \frac{\partial SL(x_0)}{\partial \nu_x} + \frac{1}{2}\varphi(x_0) \quad \text{(Gauss satsen)}$$

$$f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \left[SL(x) + \frac{\partial}{\partial \nu} SL(x) \right] = SL(x_0) + \frac{\partial SL(x_0)}{\partial \nu +} + \frac{1}{2}\varphi(x_0)$$

$$RI: \; f(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \left[\Phi(x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x,y) \right] dS + \frac{1}{2}\varphi(x) \quad \text{[Robin interna]}$$

Betr $\Delta u = 0$ för att se om $\exists$ många lösningar

$u_\nu + u|_{\partial S} = 0$; mult med u

randv. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -u$

$$0 = \int_D \Delta u \cdot u \, dx = -\int_D |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} u \, dS = -\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial D} |u|^2 dx$$

$$\Rightarrow u = 0 \quad \text{ty} \quad \int_D |\nabla u|^2 dx = 0 \;\&\; \int_{\partial D} |u|^2 dx = 0$$

---

11 Lös $\varphi(s) = s + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (s+t)\varphi(t)\,dt$

a)

$$= s + \frac{1}{2} s \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt =$$

$$= s\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt\right)}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\varphi(t)\,dt}_{B} = As + B$$

$$As + B = s\left(1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(At+B)\,dt\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t(At+B)\,dt$$

$$= s\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2B\right) + \frac{1}{2} A \frac{2}{3} = s(1+B) + \frac{A}{3}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 1 + B \\ B &= \frac{A}{3} \end{aligned}\right\} \quad A\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{3}{2}, \; B = \frac{1}{2} \qquad \varphi(s) = As + B = (3s+1)\frac{1}{2}$$

b) $\varphi(s) = 1 + \int_0^{2\pi} \cos(s-t)\varphi(t)\,dt = 1 + \int_0^{2\pi} (\cos s \cos t + \sin s \sin t)\varphi(t)\,dt$

$= 1 + \cos s \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t\,\varphi(t)\,dt}_{A} + \sin s \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\,\varphi(t)\,dt}_{B}$

$\varphi(s) = 1 + A\cos s + B \sin s$

sätter in i ekv. och jämför koeff. & finner $\varphi(s) = 1$.

12, sid 240

$\varphi(s) - \lambda \int_0^t \frac{s-t}{(s+t)(t+1)} \varphi(t)\,dt = 0$

mult med $\frac{\varphi(s)}{s+1}$

$\int_0^1 \frac{\varphi(s)^2}{s+1} ds = \lambda \int_0^1 \int_0^1 \frac{s-t}{(s+t)(t+1)(s+1)} \varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt =$

$= \lambda \int_0^1\int_0^1 \frac{s\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt}{(s+t)(s+1)(t+1)} - \lambda \int_0^1 \int_0^1 \frac{t\varphi(t)\varphi(s)\,ds\,dt}{(s+t)(s+1)(t+1)} = 0$

byter s och t vilket ger 1a integralen

$\Rightarrow \varphi(s) = 0$

13. $\exists$ egenv & egenfkt till

$\varphi(s) - \lambda \int_0^1 s t \varphi(t)\,dt = 0$

$\varphi(s) = \lambda s \underbrace{\int_0^1 t\varphi(t)\,dt}_{A}$ $\qquad \varphi(s) = \lambda A s$

$\lambda A s = \lambda^2 A s \int_0^1 t^2\,dt = \lambda^2 A \frac{s}{3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{– ej egenvärde} \\ \lambda_2 = 3 & \text{– går bra} \end{cases}$

$\varphi(s) = 3s$ eller ks

godt, ER

14 Visa att

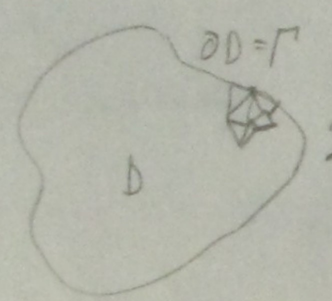
$$\varphi(s) - \lambda\int_0^\pi \sin s \cos t \, \varphi(t)\, dt$$ ej har några egenvärden

$$\varphi(s) = \sin s \, \lambda \int_0^\pi \cos t \, \varphi(t)\, dt = \sin s \, \lambda A$$

$$\lambda A \sin s = \sin s \, \lambda^2 A \int_0^\pi \cos t \sin t \, dt = \frac{\lambda^2 A \sin s}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^\pi = 0$$

$\Rightarrow \lambda A \sin s = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ men $\lambda = 0$ ej egenvärde.

Numerisk lösn av integralekv av potentialteori (BEM)



1. tar knutpunkterna på Γ (i 3D) och triangulerar
2. Tar basfunktioner

- $\varphi_k(x)$, $x \in \Gamma$
- $\varphi_k(x_k) = 1$
- $\varphi_k(x_j) = 0$, $j \neq k$
- φ_k - styckvis linjär "ett tält"
- randelement.

Vi söker approximativa lösningen $\varphi_h(x)$ till integralekv.

$$\lambda\varphi(x) + \int_\Gamma \varphi(y) k(x,y)\, dS = f(x)$$

på formen $\varphi_h(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x)$ α_k okända

för att best. α_k

$$\lambda \varphi(x)\varphi_k(x) + \int_\Gamma \varphi(y) k(x,y) \varphi_k(x)\, dS = f(x)\varphi_k(x)$$

$$\lambda\int_\Gamma \varphi(x)\varphi_k(x)\, dS + \int_\Gamma\int_\Gamma \varphi(y) k(x,y) \varphi_k(x)\, dS\, dS = \int_\Gamma f(x)\varphi_k(x)\, dS$$

Sätter in φ_h isf. φ.

$$\lambda \int_\Gamma \sum \alpha_j \varphi_j(x) \varphi_k(x) ds + \int_\Gamma \int_\Gamma \sum \alpha_j \varphi_j(y) \varphi_k(x) K(x,y) ds ds = \int_\Gamma f(x) \varphi_k(x) ds$$

$$\lambda \sum_j \alpha_j m_{jk} + \sum_j \alpha_j S_{jk} = \beta_k \quad , k = 1, \ldots, N$$

$$m_{jk} = \int_\Gamma \varphi_j \varphi_k ds \quad \text{(masskoeff. } m_{jk}\text{)}$$

$$S_{jk} = \int_\Gamma \int_\Gamma K(x,y) \varphi_k(x) \varphi_j(y) ds ds \quad ; \beta_k = \int_\Gamma f(x) \varphi_k(x) ds$$

(styvhetskoeff S_{jk})

matrisen (S_{jk}) är ej gles men nästan (enl. meningen att elementen är små på stor avstånd)

(m_{jk}) är gles

Fredholmekvationer av 1a typ

$\Delta u = 0$, $u|_{\partial D} = f$

söker lösn som singellagerpotential

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x,y) ds \quad \text{kontin på } \partial D$$

$$\boxed{: \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x,y) ds = f(x) \quad , x \in \partial D}$$

tar basfkt φ_k - randelement

söker approx. lösn som $\psi_h(x) = \sum_j \varphi_k(x) \alpha_k$; α_k okända.

mult m φ_k och integrera

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \varphi_k(x) \Phi(x,y) \underset{\underset{\varphi_h}{\uparrow}}{\varphi(y)} ds ds = \int_\Gamma f(x) \varphi_k(x) ds$$

sätter in φ_h

$$\sum \alpha_j S_{jk} = \beta_k \quad ; \quad S_{jk} = \int_\Gamma \varphi_k(x)\varphi_j(y)\,\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$AX = B$ $\qquad X = (x_1, \ldots, x_N)^T$

A = koeff matris

$B = (\beta_1, \ldots, \beta_N)^T$

$|\lambda_{max}|$ största egenvärden av A.
$|\lambda_{min}|$ minsta

$$k = \left|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right| \text{ - konditionstal}$$

Paraboliska ekv. med tidsvariabel

variabler : $t, x_1, \ldots, x_n = (t, x)$

$$u_t - \sum a_{jk} u_{jk} - \sum b_j u_j - cu = f$$

$a_{jk} = a_{jk}(x,t)$; $b_j = b_j(x,t)$, $c = c(x,t)$, $f = f(x,t)$

$A = \left(a_{jk}(x,t) \right)$ har alla egenvärden positiva

om koefficienterna inte beror på t, stationär parab. ekv.

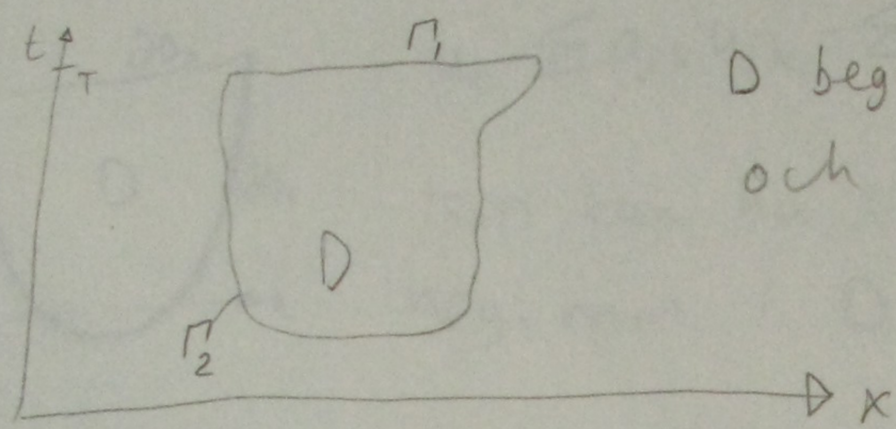
Det viktigaste exemplet: värmeledn. ekv.

$$u_t - \underset{k \text{ (ibland)}}{\Delta u} = f$$

Svaga maximumprincipen

För lösningar av paraboliska ekv (i omr $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) är det omöjligt att ha ett lok. max i ngn inre pkt i området. (värme kan ej ansamla sig av sig själv)

$u_t - \sum a_{jk} u_{jk} - \sum b_j u_j - cu = f \quad (*)$



D begr. av planet $t = T$ uppåt och av ngn yta nedåt.

Maxprincipen

Låt u vara en lösn till $(*)$ i D och kontin i D med gränserna och $c \le 0$

$u(x,t)$ kan ha sitt positiva max eller negativa min i D endast på Γ_2