

PDE

F3

Fö

96 sidor

50:~

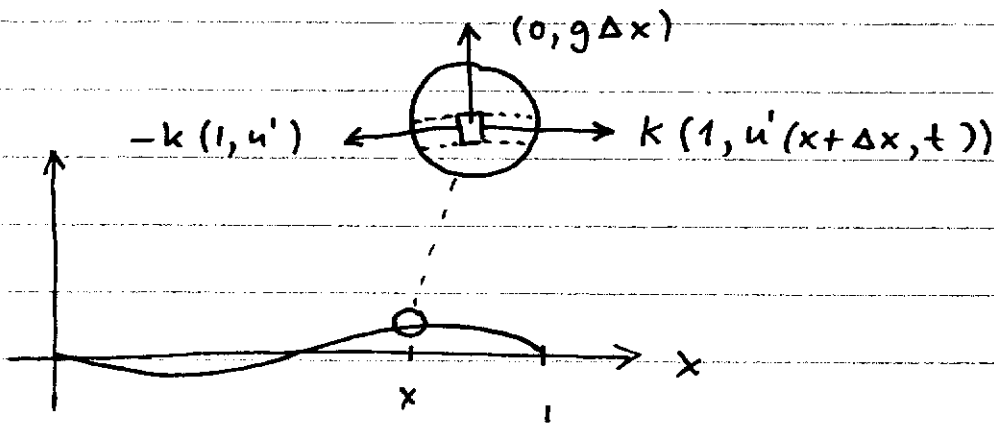
Fö1 Grundl. PDE-modellerSvängande sträng:

u lägeskoordinat.

m massa p. längdenh.

g yttre kraft p. l.e.

k strängspänningen (\approx)



Enl. Newton:

$$m \ddot{u} \Delta x = g \Delta x + k u'(x+\Delta x, t) - k u'(x, t).$$

Div. $m \cdot \Delta x$ och $\Delta x \rightarrow 0$ ger

$$m \ddot{u} = g + k u''$$

PDE!

där $\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}$ & $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Om $g = f - \underbrace{\dots}$ erhålls
 friktionskraft

$$-ku'' + lu + m\ddot{u} = f$$

1:2

Trä renodlade fall:

I. $m=k=1, l=0$

$$\ddot{u} - u'' = f$$

vågekvationen

II. $l=k=1, m=0$ (lätt sträng)

$$\dot{u} - u'' = f$$

värmeledn. ekv.

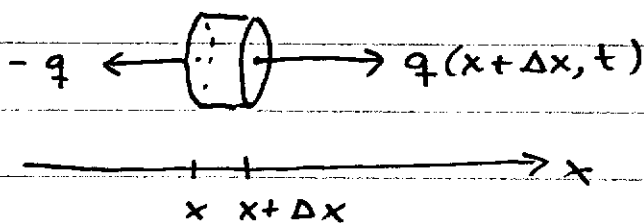
III stationärt (tidrob.) tillst. m. $k=1$

$$-u'' = f$$

Poissons ekv

Ekv. kallas homogena om $f=0$.

Värmeledning:



u tempen

q värmeflödet

f värmeprod.

$$q = -ku' \quad (k > 0)$$

Energi balans:

$$u \Delta x = f \Delta x - \underbrace{[q(x+\Delta x, t) - q(x, t)]}_{\text{värmeutflödet}}$$

Div. m. Δx och $\Delta x \rightarrow 0$ ger

1:3

$$\dot{u} = f - q' = f + (ku')'$$

drs för $k=1$

$$\boxed{\dot{u} - u'' = f}$$

värmeledn. ekv.

Måste även ange

Begynnelsevillkor:

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

&

$$\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x)$$

OBS \dot{u}_0 ej tids-
der. av u_0 !!

För värmel. ekv. räcker 1:a beg. villkoret.

samt

Randvillkor:

$$u = g \quad (\text{given temp}) \quad \underline{\text{Dirichlet typ}}$$

eller

$$q = -ku' = g \quad (\text{givet värmeff.}) \quad \underline{\text{Neumann typ}}$$

eller

$$q = \sigma(u - \bar{u}) \quad (\text{flöde prop. m. temp. diff.}) \quad (1:4)$$

dvs

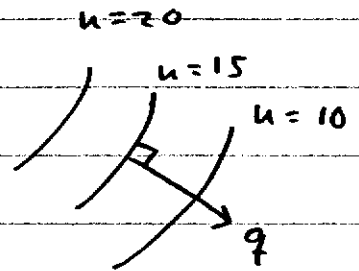
$$ku' + \sigma u = g$$

Robin typ

1 högre rumsdimension

$$v' \rightarrow \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right)$$

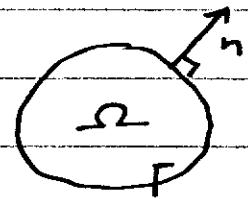
Ex. $q = -k \nabla u$ värmeff.



$$q' \rightarrow \operatorname{div} q = \nabla \cdot q = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial q_d}{\partial x_d}$$

ty värmeutflödet =

$$\int_{\Gamma} q \cdot n = \int_{\Omega} \nabla \cdot q = \int_{\Omega} \operatorname{div} q$$



enl. divergenssatsen / Gauss sats.

Speciellt alltså

$$(ku')' = \nabla \cdot k \nabla u = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$$

Om $k=1$

$$u'' \rightarrow \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla^2 u = \Delta u$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)}$$

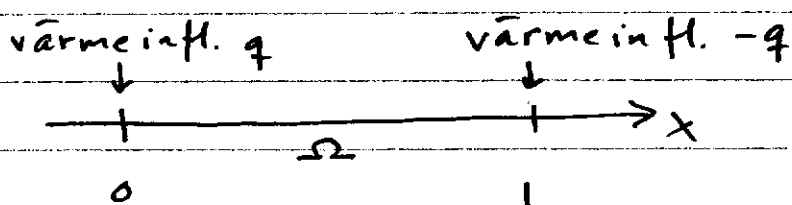
Laplace operatorn.

För randvillkoren gäller

1:5

$$q = g \rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = g$$

(givet värmeinflöde)



Strömning:

Navier-Stokes. inkompr

$$\begin{cases} \dot{u} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \mu \Delta u = f & \leftarrow 3 \text{ ekv.} \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$ hastigheten

p

trycket

f

yttre kraft

μ

viskositeten

4 ekv. - 4 obek. u_1, u_2, u_3, p .

Potentialströmning Om $\text{rot } u = 0$ så

$u = -\nabla \varphi$ för ngt φ (kan bilda

vägor. $\varphi(x) = -\int_{\bar{x}}^x u$)

$$\nabla \cdot u = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-\Delta \varphi = 0}$$

Poissons / Laplace ekv.

Stokes: $(u \cdot \nabla)u$ försumbar.

För $w := \text{rot } u = \text{curl } u = \nabla \times u$ gäller då

$$\boxed{\dot{w} - \mu \Delta w = g (= \text{rot } f)}$$

Värmelek.

Från $\text{div } u = 0$ följer $u = \text{rot } \psi$

för ngt ψ , strömningsfkt & $\text{div } \psi = 0$

om man så vill. Följer att

$$w = \text{rot } u = \text{rot } \text{rot } \psi = \underbrace{\nabla \nabla \cdot \psi}_{=0} - \Delta \psi$$

dvs

$$\boxed{-\Delta \psi = w}$$

Poissons ekv

Maxwells ekv.

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot E = \rho$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} \quad (\text{Faraday}) \quad j \text{ strömmen}$$

$$\nabla \times B = j + \dot{E}$$

B magn. fältet

E el fältet

ρ leddn. tätheten

j strömmen

Stationärt: $\nabla \times E = 0 \Rightarrow$

1:7

$$E = -\nabla\varphi \quad \therefore$$

$$\boxed{-\Delta\varphi = \rho}$$

Poissons ekw.

Allmänt: $\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow B = \nabla \times A \quad \& \quad \nabla \cdot A = -\dot{\varphi}$

ins. i Faraday

$$\nabla \times (E + \dot{A}) = 0 \Rightarrow E + \dot{A} = -\nabla\varphi.$$

Divergenstagning ger

$$\rho + \underbrace{\nabla \cdot \dot{A}}_{-\ddot{\varphi}} = -\Delta\varphi$$

dvs

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \Delta\varphi = \rho}$$

vägelw.

Ekv. för $\nabla \times B$ ger

$$\underbrace{\nabla \times \nabla \times A}_{\nabla \nabla \cdot A - \Delta A} = j + \underbrace{\dot{E}}_{-\nabla\dot{\varphi} - \ddot{A}}$$

$\underbrace{\quad}_{-\dot{\varphi}}$

dvs

$$\boxed{\ddot{A} - \Delta A = j}$$

vägelw. igen !!

Fö 2 Energiuppskattningar

Betrakta värmeledn. elw.

$$(1) \quad \dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega$$

med randvillk. $u=0$ på $\partial\Omega$ och begynnelse-

villk. $u=u_0$ i Ω vid $t=0$. Mult. (1) med u

och integrera över Ω :

$$\int_{\Omega} \dot{u}u - \int_{\Omega} \Delta uu = 0.$$

Här gäller $\dot{u}u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2$ och $-\int_{\Omega} \Delta uu = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u$

Dvs, vi får

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 = 0,$$

där $\|\cdot\|$ betecknar $L_2(\Omega)$ -norm. Integration i t-led

från $t=0$ till $t=t$ ger

$$\frac{1}{2} \|u\|^2(t) - \frac{1}{2} \|u\|^2(0) + \int_0^t \|\nabla u\|^2 = 0,$$

dvs

$$\|u\|^2(t) + 2 \int_0^t \|\nabla u\|^2 = \|u_0\|^2.$$

Speciellt har vi att

$$\|u\|(t) \leq \|u_0\|.$$

Övn: Visa att $\|\nabla u\|(t) \leq \|\nabla u_0\|$, genom att mult. (1) m. $-\Delta u$. Gäller denna olikh. f. $u_0 = \text{kon}$

Övn Visa motstr. uppsk. m. randv. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Mult. nu (1) m. $-t\Delta u$. Vi får

$$-t \int_{\Omega} \dot{u} \Delta u + t \int_{\Omega} (\Delta u)^2 = 0.$$

Här gäller $\int_{\Omega} \dot{u} \Delta u = - \int_{\Omega} \nabla \dot{u} \nabla u = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2$,

dvs vi har

$$t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 = 0,$$

som även kan skrivas

$$\frac{d}{dt} (t \|\nabla u\|^2) + 2t \|\Delta u\|^2 = \|\nabla u\|^2.$$

Integration i t -led ger nu

$$t \|\nabla u\|^2(t) + 2 \int_0^t s \|\Delta u\|^2(s) ds = \int_0^t \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2.$$

Speciellt gäller

$$\|\nabla u\|(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|u_0\|.$$

Analogt kan visas att

$$\|\Delta u\|(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2t}} \|u_0\|.$$

Övn Visa detta! Tips: Mult. (1) m.

(2:3)

$t^2 \Delta u$ o. notera att $\Delta u = \dot{u} = 0$ på $\partial\Omega$ vid

part. integr. Alternativt: Derivera $\dot{u} - \Delta u = 0$

m. a. p. t och mult m. $t^2 \dot{u}$.

Från ovan erhålls

$$\int_{\varepsilon}^t \|\dot{u}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{t}{\varepsilon} \|u_0\|.$$

Något förfinat kan erhållas

$$\int_{\varepsilon}^t \|\dot{u}\| = \int_{\varepsilon}^t \|\Delta u\| \leq \left(\int_{\varepsilon}^t s^{-1} \right)^{1/2} \left(\int_{\varepsilon}^t s \|\Delta u\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\ln \frac{t}{\varepsilon}} \|u_0\|.$$

Exempel $\begin{array}{c} x_2 \\ \square \\ \rightarrow x_1 \end{array}$ $u_0(x) = 1$, $t = 1$, $\varepsilon = 0.0001 \Rightarrow \sqrt{\ln 10} \approx 2$.

Övn Visa att om $\dot{u} - \Delta u = f$, $u_0 = 0$ m. r.v. som

ovan så gäller $\|u\|(t) \leq \int_0^t \|f\|$. Tips: Mult. m.

u och utnyttja att $\frac{d}{dt} \|u\|^2 = 2 \|u\| \frac{d}{dt} \|u\|$.

Motivera!

Övn Uppsk. $\|\nabla u\|(t)$ genom att mult. m. \dot{u} .

Vägelvationen

Betrakta nu vägelv.

$$\ddot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega,$$

med r.v. $u=0$ på $\partial\Omega$ o. beg. villkor

$$u = u_0 \quad \text{och} \quad \dot{u} = v_0 \quad \text{i } \Omega \quad \text{vid} \quad t=0.$$

Mult. m. \dot{u} och integrera över Ω :

$$\int_{\Omega} \ddot{u} \dot{u} - \int_{\Omega} \Delta u \dot{u} = 0$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \dot{u}$$

dvs

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\dot{u}\|^2 + \|\nabla u\|^2) = 0,$$

dvs

$$\frac{1}{2} \|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 = \text{konst. oberoende av } t.$$

Totala energin bevaras:

$$\frac{1}{2} \|\dot{u}\|^2 \quad \text{kinetisk energi}$$

$$\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 \quad \text{potentiell elastisk energi}$$

Övn. Visa att $\|\nabla \dot{u}\|^2 + \|\Delta u\|^2 = \text{konst. oberoende av } t$.

Tip: Mult. m. $-\Delta \dot{u}$. Att. Derivera o. mult. m. \dot{u} .

Övn. Finn en tot. energi kons. m. r.v. $\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$.

Betrakt m

$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega.$$

Mult. m. u och \int :

$$\|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} f u \leq \|f\| \|u\|.$$

Cauchy-olikhet

Men h\u00e4r g\u00e4ller att (antar Ω begr.)

$$\|u\| \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|.$$

Beweis: L\u00e5t φ vara s\u00e5dan att $\Delta\varphi = 1$ i Ω

och $2|\nabla\varphi| \leq C_{\Omega}$ i Ω . D\u00e4r

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2 \Delta\varphi = - \int_{\Omega} 2u \nabla u \cdot \nabla\varphi \leq C_{\Omega} \|u\| \|\nabla u\|,$$

dvs $\|u\| \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|$ v.s.v.

Vi f\u00e5r allts\u00e5

$$\|\nabla u\| \leq C_{\Omega} \|f\|.$$

\u00d6vn Bewise en motsv. uppdr. f. probl.

$$-\Delta u + u = f \text{ i } \Omega \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega.$$

skall senare se att u minimerar energi

$$\frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - \int f v$$

inre pot. energ
elast. energi

yttre pot. energi

Betrakta t.ex. en sträng med lägeskoord.

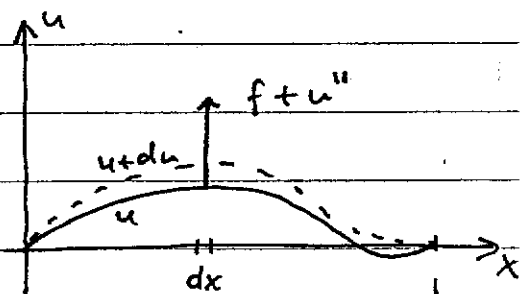
$u = u(x)$ enl. figur, och en lägesförskjutning

du . Har sett att vertikalkraften på strängen

ges av $u'' + f$ per längdenhet. Strängen till-

förs då energin (kraft \times väg)

$$dE = - \int_{x=0}^{x=1} (u'' + f) du dx.$$



Partiell integration ger

$$dE = \int_{x=0}^{x=1} (u' du' - f du) dx = d \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'^2 - fu \right) dx.$$

Övn. Verifiera detta genom att skriva $du = \frac{du}{ds} ds$

där s är en fikтив tid.

Vid övergång från tillståndet $u=0$ till $u=v$

till förs alltså energin

$$E = \int_{u=0}^{u=v} dE = \int_{u=0}^{u=v} d \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'^2 - fu \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} v'^2 - fv \quad \text{v.s.v.}$$

Fö 3

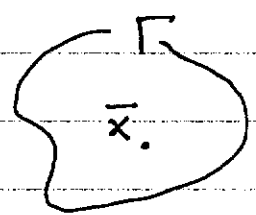
Maximumprinciper

f. Laplace elw. $\Delta u = 0$, u harmonisk.

"En harmonisk fun. saknar lokala max o. min" (utom i fallet u konst.)

Mera precist: Kan ej finnas punkt \bar{x} och omslutande kurva (yta) Γ sådan att

(eller $u(\bar{x}) > \max_{\Gamma} u$
 $u(\bar{x}) < \min_{\Gamma} u$)

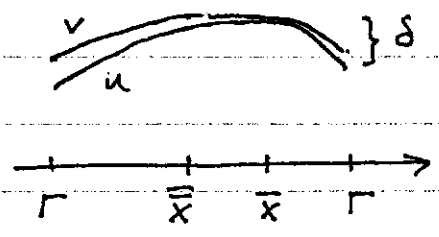


Beris Antag $u(\bar{x}) - \max_{\Gamma} u = \delta > 0$. För

$v(x) := u(x) + \epsilon |x - \bar{x}|^2$ och $\epsilon > 0$ tillr. litet

gäller då

$v(\bar{x}) = u(\bar{x}) > \max_{\Gamma} v$.



Men då måste också finnas någon punkt \bar{x} , innanför Γ , i vilken v har lokalt max, och i en sådan punkt gäller ju

$\Delta v(\bar{x}) \leq 0$.

Men vi vet ju att

$$\Delta v = \underbrace{\Delta u}_{=0} + 2d\varepsilon > 0.$$

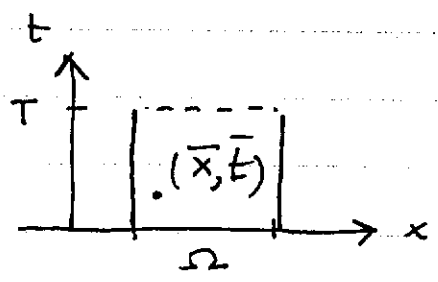
Motsägelsen bevisar att $u(\bar{x}) > \max_{\Gamma} u$ ej kan gälla. v.s.v.

Övn. Visa att om $-\Delta u + u = 0$ så kan u inte ha något positivt lokalt max.

För värmeledn. elw. gäller:

Antag att $\dot{u} - \Delta u = 0$ i $\Omega \times (0, T]$. Då antar u 's största (resp. minsta) värde någonstans på den "paraboliska randen"

$$\sqcup := \{(x, t) : x \in \partial\Omega \text{ eller } t = 0\}$$



Antag nämligen att det finnes punkt (\bar{x}, \bar{t}) med

$$\bar{x} \in \Omega, \bar{t} > 0 \text{ sådan att } u(\bar{x}, \bar{t}) > \max_{\sqcup} u.$$

För v som ovan och ε tillr. litet skulle då gälla i någon punkt $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}})$ med $\bar{\bar{x}} \in \Omega,$

$\bar{t} > t$ med lok max för v :

$$0 \leq \underbrace{\dot{v}(\bar{x}, \bar{t})}_{\geq 0^*} - \underbrace{\Delta v(\bar{x}, \bar{t})}_{\geq 0} = \underbrace{\dot{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \Delta u(\bar{x}, \bar{t})}_{=0} - 2d\varepsilon < 0$$

* = 0 för $\bar{t} < T$.

Återigen är detta en motsägelse som bevisar påståendet.

Övn. Undersök huruvida denna max princ. kan generaliseras till elw.

$$u - \nabla \cdot k \nabla u + \beta \cdot \nabla u = 0, \quad k(x, t) > 0.$$

Fundamental lösningar,

f. Poissons elw.

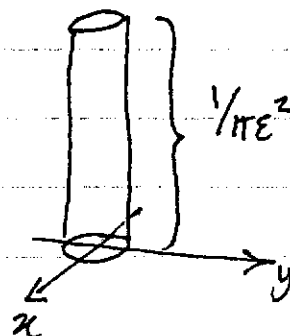
Söker först lösn. F till

$$-\Delta F = \delta \quad \text{i } \mathbb{R}^2,$$

$$\text{där } \delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon, \quad \delta_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1/\pi\varepsilon^2 & \text{för } 0 \leq r \leq \varepsilon \\ 0 & \text{'' } r > \varepsilon \end{cases}$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Obs:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta_\varepsilon = 1$$



Kedjeregeln ger för $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\Delta F = F''_{xx} + F''_{yy} = \frac{1}{r} (r F'_r)'_r + \frac{1}{r^2} F''_{\theta\theta}.$$

Här rimligt att söka lösn. F ober. av θ ,
dvs söker $F = F(r)$ s.a.

$$-\frac{1}{r} (r F'_r)' = \delta_\epsilon,$$

$$\text{dvs } (r F'_r)' = -r \delta_\epsilon = \begin{cases} -\frac{r}{\pi \epsilon^2} & r \leq \epsilon \\ 0 & r > \epsilon. \end{cases}$$

Integration ger

$$r F'_r = \begin{cases} -\frac{r^2}{2\pi \epsilon^2} + C_1 & r \leq \epsilon \\ C_2 & r > \epsilon. \end{cases}$$

Ins. av $r=0$ resp. $r=\epsilon$ ger $C_1 = 0$,

$C_2 = -\frac{1}{2\pi}$. Ny integration ger

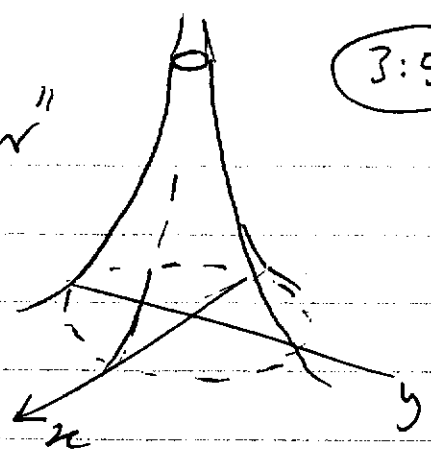
$$F = \begin{cases} \dots \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} & r > \epsilon, \end{cases}$$

dvs, då $\epsilon \rightarrow 0$ erhålles

$$F = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} (+ D).$$

(Anm. Finns fler lösn. men då även ber. av θ)

F's utseende: "Vulkankrater"



$F(r)$ motsv. temperaturfältet kring en punktvärmekälla i origo, med intensitet $\int_{\mathbb{R}^2} \delta = 1$.

Motsv. lösn. i \mathbb{R}^3 , där

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} (r^2 F_r)'_r + \dots$$

ges av $F = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} (+ D)$. Verifiera detta!

Återigen: "Vulkankrater."

Superposition

En godt. funktion $f = f(x)$ kan skrivas som en summa/integral av "punktkällor"

$$f(x) = \int f(y) \delta(y-x) dy = \int f(y) \delta(x-y) dy.$$

Eftersom ekvationen är linjär kan lösn. till

$$-\Delta u = f$$

erhållas genom att summera/integr.

Lösningarna $f(y) F(x-y)$ motsv. de
enrhilda punkt källorna $f(y) \delta(x-y)$ i
integralen, dvs

$$u(x) = \int f(y) F(x-y) dy.$$

Notera att

$$-\Delta_x F(x-y) = \delta(x-y),$$

vilket ger

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\Delta_x \int f(y) F(x-y) dy \\ &= \int f(y) (-\Delta_x F(x-y)) dy = \int f(y) \delta(x-y) dy \\ &= f. \end{aligned}$$

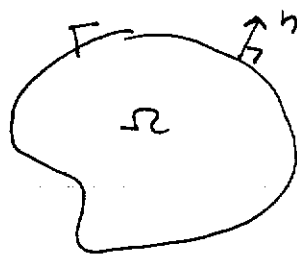
Alternativt,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int u(y) \delta(y-x) dy = \int u(y) (-\Delta_y F(y-x)) dy \\ &= (\text{Greens formel}) = \int \underbrace{(-\Delta u)}_{f(y)} F(y-x) dy, \\ &= \int f(y) F(x-y) dy. \end{aligned}$$

Här gäller $F(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$ resp.

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}.$$

Randvillkor



3:7

Följer att

$$u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} f(y) F(x-y) dy}_{v(x)} + \underbrace{\int_{\Gamma} \varphi(y) F(x-y) dy}_{w(x)}$$

Löser $-\Delta u = f$ i Ω , ober. av $\varphi(y)$, ty
källpunkterna y i $w(x)$ ligger på Γ ,
utanför Ω .

Integralen $w(x)$ kallas en "enkelskiktets
potential", och motsv. potentialen från
en laddnings-täthet $\varphi(y)$ på Γ .

För att även uppfylla givna randvill-
kor på u , t.ex. $u = g$ på Γ , söker
vi φ s.a.

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) F(x-y) dy = g(x) - v(x) \text{ för } x \in \Gamma.$$

ett ex. på en Fredholm integralekv. av 1:a
slaget.

Randelementmetoden: ($v=0$)

3:8

Ansätter $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \phi_i \varphi_i(y)$ och söker ϕ_i s.a.

$$\int_{K_j} \int_{\Gamma} \varphi(y) F(x-y) dy dx = \int_{K_j} g(x) dx \quad j=1, \dots, n,$$

där $\{K_j\}$ är en elementindelning av Γ ,

$$\Gamma = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n, \quad \varphi_i = \begin{cases} 1 & \text{på } K_i \\ 0 & \text{på } \Gamma \setminus K_i \end{cases}.$$

Ger ett ekvationssystem $A\phi = b$ för

$$\phi = (\phi_i) \text{ med } b_j = \int_{K_j} g(x) dx \text{ och}$$

$$A_{ji} = \int_{K_j} \int_{K_i} F(x-y) dy dx.$$

Fredholm integralekv. av 2:a slaget:

$$\varphi(x) + \int_{\Gamma} \varphi(y) K(x,y) dy = h(x)$$

uppkommer bl.a. för randvärden av
typen

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g.$$

Fö4

Fundamentallösn. t. värmeledn. ekv.

Visar att $u(x,t) = c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x|^2/4t}$ lösn. t

$\dot{u} - \Delta u = 0$ i $\mathbb{R}^d, t > 0$ med begynnelsevärld.

$u(x,0) = \delta(x)$ med lämpl. val av $c = c_d$.

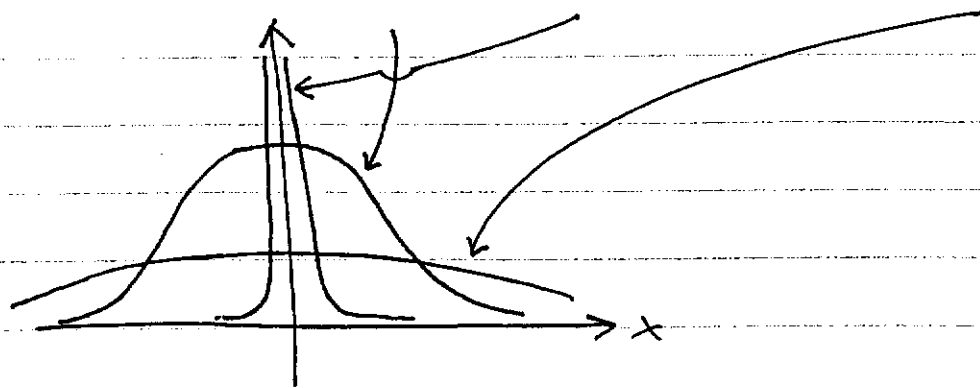
Kontroll: $\dot{u} = c \left(-\frac{d}{2}\right) \frac{1}{t^{d/2+1}} e^{-|x|^2/4t} + c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} \frac{|x|^2}{4t^2}$

$$\nabla u = c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} \left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$\Delta u = c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} \underbrace{\left(-\frac{x}{2t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{2t}\right)}_{\frac{|x|^2}{4t^2}} + c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x|^2/4t} \left(-\frac{d}{2t}\right),$$

dvs $\dot{u} = \Delta u$!!

Skissar $u(x,1)$, $u(x,0.01)$ och $u(x,100)$:



Noterar att $u(x,t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{då } t \rightarrow 0^+ \text{ för } x \neq 0 \\ \infty & \text{---||--- för } x = 0 \end{cases}$

Söker bestämma c , för $d=2$, så att

$u(x,t) \rightarrow \delta(x)$ då $t \rightarrow 0^+$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} c \frac{1}{t} e^{-|x|^2/4t} dx = 2\pi c \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-r^2/4t} r dr$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s = r^2/4t \\ ds = r/2t dr \end{array} \right\} = 4\pi c \int_0^\infty e^{-s} ds = 4\pi c = 1 \quad \text{om } c = \frac{1}{4\pi}.$$

Övn. Beräkna c för $d=1$ och $d=3$.

Superposition Lösning till $\dot{u} - \Delta u = 0$, $t > 0$,

$u(x,0) = u_0(x)$ ges nu av

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) c \frac{1}{t^{d/2}} e^{-|x-y|^2/4t} dy.$$

Låt oss nu beteckna denna funktion av

x med $E(t)u_0$, dvs $E(t)v$ är en

funktion av x (och t) sådan att

$$E'(t)v - \Delta E(t)v = 0 \quad \text{och} \quad E(0)v = v$$

för godtygligt givet v . Vi får nu ...

Duhamels princip: Lös. till

$$\ddot{u} - \Delta u = f, \quad t > 0, \quad u(\cdot, 0) = 0,$$

ges av

$$u(\cdot, t) = \int_0^t E(t-s) f(\cdot, s) ds.$$

Beris. Klart att $u(\cdot, 0) = 0!$ Egen-

skaperna hos E enl. ovan och deriver-

ingsregeln

$$\frac{d}{dt} \int_0^t g(t,s) ds = g(t,t) + \int_0^t g'_t(t,s) ds,$$

ger

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= E(0) f(\cdot, t) + \underbrace{\int_0^t E'(t-s) f(\cdot, s) ds}_{= \Delta E(t-s) f(\cdot, s)} \\ &= f + \Delta \int_0^t E(t-s) f(\cdot, s) ds = f + \Delta u \end{aligned}$$

v.s.v.

Superposition

Lös. till $\ddot{u} - \Delta u = f, \quad t > 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0,$

ges nu av

$$u(\cdot, t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) f(\cdot, s) ds,$$

dvs

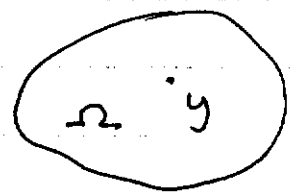
$$u(x, t) = \frac{c}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) e^{-|x-y|^2/4t} + c \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y, s) e^{-|x-y|^2/4(t-s)} dy ds.$$

Övn. Best. u för $f = \delta(x-\bar{x}, t-\bar{t}) = \delta(x-\bar{x})\delta(t-\bar{t})$.

Green's funktion. (Inkluderar randvillk.)

Ex. Låt $G = G(x, y)$ beteckna lösn. till

$$\begin{cases} -\Delta_x G = \delta(x-y) & \text{i } \Omega \times \mathbb{R} \\ G = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$



Superposition. Lös. till

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

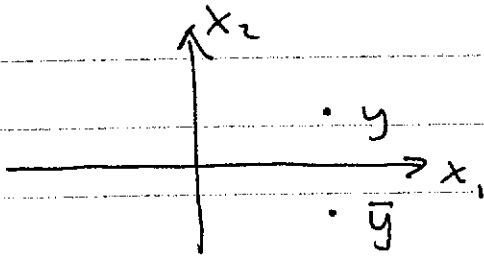
ges nu av

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy.$$

För $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ ges G av

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-\bar{y}|}$$

där \bar{y} är y 's spegelbild i x_1 -axeln:



Övn. Verifiera detta.

Vågekvationen. För $f=0$ och i

en rumdim. kan elw. skrivas

$$\ddot{u} - u'' = 0.$$

Visar att $u(x,t) = g(x-t) + h(x+t)$ löser

elw., oavsett g och h :

$$u'' = g'' + h'', \quad \dot{u} = -g' + h', \quad \ddot{u} = +g'' + h''$$

↑
inre der.

dvs $\ddot{u} = u''$ v.s.v.

Givet beg.villkoren $u(x,0) = u_0(x)$ och

$\dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x)$ kan g och h bestämmas.

$$\dot{u}_0 = 0 \Rightarrow h' = g', \quad \text{dvs} \quad h = g + c \quad (\text{konst.})$$

$$\text{dvs} \quad u_0 = g + g + c = 2g + c, \quad \text{dvs}$$

$$g = \frac{u_0 - c}{2}, \quad h = \frac{u_0 + c}{2}, \quad \text{dvs}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x-t) + \frac{1}{2} u_0(x+t).$$

$$u_0 = 0 \Rightarrow h = -g, \quad \text{dvs} \quad \dot{u}_0 = -g' + h' = 2h',$$

$$\text{dvs} \quad h(z) = \frac{1}{2} \int_0^z \dot{u}_0 + c, \quad g(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z \dot{u}_0 - c$$

$$= \frac{1}{2} \int_z^0 \dot{u}_0 - c, \quad \text{dvs}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \dot{u}_0 + c + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 \dot{u}_0 - c$$

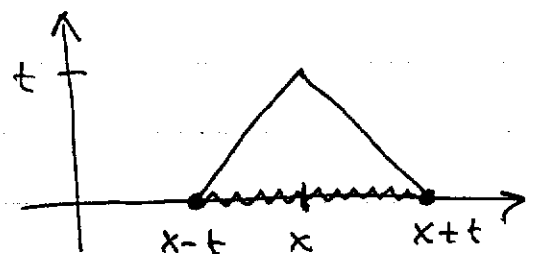
$$= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \dot{u}_0.$$

Superposition

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x-t) + \frac{1}{2} u_0(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \dot{u}_0.$$

Obs. Ändl. utbr. hast.

]fr. värmeledn.



Övn. Verifiera att $u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^{x+t-s} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s) dy ds$

ger en lösning till $\ddot{u} - u'' = f$.

Övn. Generalisera till fallet $\ddot{u} - c^2 u'' = f$ med givna begynnelsevillkor vid $t=0$.

Randvärdesproblem. Söker $u(x,t)$ s.a.

$\ddot{u} - u'' = 0$ för $x > 0, t > 0, u'(0,t) = 0$ för $t > 0,$

$u(x,0) = u_0(x)$ & $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$ för $x > 0.$

Utvidgar $u(x,t)$ till jämn funktion $\tilde{u}(x,t)$ s.a.

$\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$ för $x > 0, \tilde{u}(x,t) = u(-x,t)$ för

$x < 0.$ Då löser \tilde{u} vågekv. för alla $x \in \mathbb{R}, t > 0.$

Övn. Verifiera detta!

och eul. d'Alembert gäller

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x-t) + \tilde{u}_0(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{v}_0(s) ds,$$

där $\tilde{u}_0(s) = \tilde{u}(s,0)$ & $\tilde{v}_0(s) = \tilde{v}(s,0) = \dot{\tilde{u}}(s,0).$

Speciellt gäller då för $0 < x < t$:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(-(x-t)) + u_0(x+t)]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 v_0(-s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} v_0(s) ds$$

$$= \frac{1}{2} [u_0(t-x) + u_0(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} v_0(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} v_0(s) ds.$$

För $x > t$ gäller samma lösn. formel som förut!

Övn. Härled motsv. formel f. randvillkoret $u(0,t) = 0$.

Övn. Beträkta vägekv. i \mathbb{R}^3 $\ddot{u} - \Delta u = 0$ med

radiell symmetri, dvs $u = u(r,t)$ där $r = |x|$.

För u gäller då $\ddot{u} - \frac{1}{r^2} (r^2 u')' = 0$ där $v' = \frac{\partial v}{\partial r}$.

Ansätt $u(r,t) = \frac{v(r,t)}{r}$ och visa att $\ddot{v} - v'' = 0$.

Övn. Bestäm $u(x,t)$ s.a.

$$\ddot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \mathbb{R}^3, t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{för } |x| < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad \dot{u}(x,0) = 0,$$

motsv. en ballong m. radie 1 som brister

vid $t=0$ med åtföljande tryckväg $u(x,t)$.

Fö 5

Riesz och Lax-Milgrams satser

Betrakta problemen: Ω och f givna,

$$(D) \quad -\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega, \quad u = ?,$$

och

$$(M) \quad F(u) = \min_{v \in V} F(v), \quad u \in V, \quad u = ?,$$

$$\text{d\u00e4r } F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v \text{ och } V = H_0^1(\Omega) =$$

$$\{v : \int_{\Omega} |\nabla v|^2 < \infty, v = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega\}.$$

Skall visa: $(D) \Leftrightarrow (M)$.

Definiera f\u00f6r godtycklig $v \in V$ och $\lambda \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = F(u + \lambda v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + \lambda v)|^2 - \int_{\Omega} f(u + \lambda v)$$

$$= F(u) + \lambda \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Antag nu u l\u00f6sn. till (M). F\u00f6r

$$g'(\lambda) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) + \lambda \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

g\u00e4ller d\u00e4 $g'(0) = 0$, dvs

$$(V) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \text{ f\u00f6r alla } v \in V.$$

Men härav följer att

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v = \int_{\Omega} fv \quad \text{för alla } v \in V,$$

vilket bara kan gälla om $-\Delta u = f$ i Ω

v.s.v.

Omvänt gäller förstås att $-\Delta u = f$

$\Rightarrow (V)$, och att $(V) \Rightarrow (M)$, ty $(V) \Rightarrow$

$$F(v) = F(u+w) = F(w) + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - fw}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2}_{\geq 0} \geq F(u)$$

för alla $v \in V$. Dvs, vi har visat

$$(D) \Leftrightarrow (V) \Leftrightarrow (M).$$

Hur vet vi då att (D) , (V) och (M) har en lösning?

Noterar att $(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ är bilinjär:

$$(u+w, v) = (u, v) + (w, v), \quad (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$$

$$(u, v+w) = (u, v) + (u, w), \quad (u, \alpha v) = \alpha(u, v),$$

Symmetrisk:

$$(u, v) = (v, u),$$

och positivt definit på V (V -elliptisk):

$$(v, v) \geq 0 \quad \text{och}$$

$$(v, v) = 0 \quad \text{endast för } v = 0,$$

dvs (u, v) är en skalar produkt på V

med motsvarande norm $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Vidare är högerledet i (V), dvs $l(v) =$

$$\int_{\Omega} f v \quad \text{linjär i } v:$$

$$l(v+w) = l(v) + l(w), \quad l(\alpha v) = \alpha l(v),$$

och, om t.ex. $\int_{\Omega} f^2 < \infty$, begränsad:

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \left(\int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} \leq \gamma \|v\|,$$

$$\text{där } \gamma = C_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2}.$$

Frågan var: Finns $u \in V$ s.a.

$$(u, v) = l(v) \quad \text{för alla } v \in V$$

resp.

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v), \quad F(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - l(v).$$

(5:4)

Svaret är ja, ty tag en följd av $u_i \in V$,

$i=1,2,\dots$, sådan att

$$F(u_i) \rightarrow \sigma := \inf_{v \in V} F(v).$$

Här gäller $\sigma > -\infty$ ty

$$F(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - l(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - \gamma \|v\| \geq -\frac{1}{2} \gamma^2,$$

och

$$\|u_i - u_j\|^2 = 2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2 - \|u_i + u_j\|^2$$

$$\underbrace{-4l(u_i) - 4l(u_j) + 4l(u_i + u_j)}_{=0}$$

$$= 4F(u_i) + 4F(u_j) - 8F\left(\frac{u_i + u_j}{2}\right)$$

$$\leq 4F(u_i) + 4F(u_j) - 8\sigma \rightarrow 0 \text{ då } i, j \rightarrow \infty,$$

dvs u_i är en s.k. Cauchy följd i V .

Men $V = H_0^1(\Omega)$ är ett fullständigt

skalärproduktsrum, ett s.k. Hilbertrum,

där varje Cauchy följd är konvergent

mot något $u \in V$, dvs det finns

$u \in V$ s.a. $u_i \rightarrow u$, och eftersom

$F(u_i) \rightarrow \sigma$ och F är kontinuerlig måste

gälla

$$F(u) = \sigma = \min_{v \in V} F(v) \quad \text{v.s.v.}$$

Resultatet ovan: Varje linjär och kont.

funktion $l(v)$ är en skalärprodukt (u, v)

kallas Riesz sats. Mer allmänt

gäller

Lax-Milgrams sats Antag $l(v)$ är

linjär och begränsad på V och att

$a(u, v)$ är bilinjär, begränsad och V -

elliptisk på V , dvs,

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$$

och

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0,$$

för alla $u, v \in V$.

Då finns entydigt bestämd $u \in V$

sådan att

$$a(u, v) = \ell(v) \text{ för alla } v \in V,$$

och

$$(*) \quad \|u\| \leq \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Anm. $a(u, v)$ behöver här ej vara symmetrisk.

Övn. Visa $(*)$ och entydigheten.

Övn. Beträkta problemet

$$-\Delta u + \beta \cdot \nabla u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ på } \partial\Omega, \quad \textcircled{1}$$

där $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ är konst. (alt. $\operatorname{div} \beta \leq 0$).

Visa att Lax-Milgr. kan tillämpas.

Övn. jämför α , γ och $\frac{\gamma}{\alpha}$ för $\beta = 0$ med

normerna $\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2}$ och $\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + v^2 \right)^{1/2}$ på

$$V = H_0^1(\Omega).$$

Betrakta nu problemet

$$-\Delta u + cu = 0 \text{ i } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ p\u00e5 } \partial\Omega,$$

d\u00e4r $c(x) \geq c_0 > 0$. Motsvarande variationsproblem \u00e4r: Best. $u \in H^1(\Omega)$ s.a.

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\partial\Omega} gv \quad \text{f\u00f6r alla } v \in H^1(\Omega)$$

\"Ovn. Visa att Lax-Milgr. kan till\u00e4mpas (om t.ex. $\int_{\partial\Omega} g^2 < \infty$).

\"Ovn. Visa att villkoret $c_0 > 0$ \u00e4r n\u00f6dv\u00e4ndigt f\u00f6r att garantera entydighet.

Betrakta problemet

$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = g \text{ p\u00e5 } \partial\Omega.$$

Motstv. variationsproblem \u00e4r: Finn $u \in H^1(\Omega)$,

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} uv = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv$$

för alla $v \in H^1(\Omega)$.

Övn. Visa att

$$\int_{\Omega} v^2 \leq C_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\partial\Omega} v^2 \right) \quad \text{för alla } v \in H^1(\Omega).$$

Övn. Visa att Lax-Milgr. kan tillämpas på Robin problemet ovan.

Övn. Visa att problemet

$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = g \text{ på } \partial\Omega,$$

kan formuleras: Bestäm $u \in V_g$ s.a.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \text{för alla } v \in V_0,$$

där

$$V_g = \left\{ v : \int_{\Omega} |\nabla v|^2 < \infty, v = g \text{ på } \partial\Omega \right\},$$

eller

$$F(u) = \min_{v \in V_g} F(v).$$

Fö6 Elliptisk regularitet

Kan visas: För områden utan "spetsiga inåtgående hörn" finns konstant $C = C_\Omega$

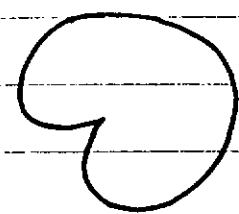
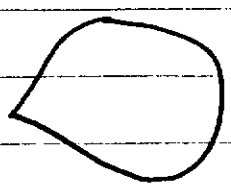
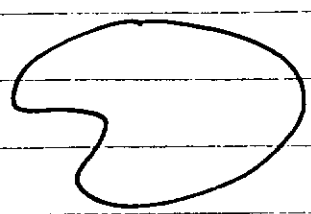
s.a.

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|D^2u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

för alla u s.a. $u=0$ eller $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ längs

$\partial\Omega$, där $D^2u = (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)^{1/2}$. Om

Ω konvex gäller $C \leq 1$.



"C = infinity"

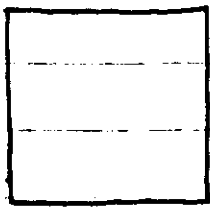
Bevis, för $\Omega = \square$ och $u=0$ på $\partial\Omega$:

Har

$$\|\Delta u\|^2 = \int_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy})^2 = \int_{\Omega} u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy}$$

Vidare

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u_{xx} u_{yy} &= \int_{\partial\Omega} u_x u_{yy} n_x - \int_{\Omega} u_x \overbrace{u_{yyx}}^{= u_{xyy}} \\
 &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} u_x u_{yy} n_x - u_x u_{yx} n_y}_{=0} + \int_{\Omega} u_{xy} u_{xy}
 \end{aligned}$$



$$n_x = 1, n_y = 0$$

$$u_{yy} = 0$$

Här gäller alltså

$$n_x = 0, n_y = -1$$

$$\|D^2 u\| = \|\Delta u\|$$

$$u_x = 0$$

Övn. Visa motsv. med randv. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Övn. Visa motsv. för $\Omega = \triangleleft$ $n = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Övn. Visa för $\Omega = \square$ och r.v. $\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$

$$\text{att } \int_{\Gamma} u_x u_{yy} n_x = - \int_{\Gamma} u u_{yy} = \int_{\Gamma} u_y^2 \geq 0 \quad \text{och}$$

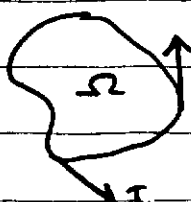
att

$$\|D^2 u\| \leq \|\Delta u\|.$$

6.3

Allmänt gäller

$$\int_{\partial\Omega} u_x u_{yy} n_x - u_x u_{xy} n_y = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

där $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \tau \cdot \nabla u$ , och

för $u=0$ på $\partial\Omega$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial u}{\partial n} / R$, dvs

$$\|D^2 u\|^2 + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 / R = \|\Delta u\|^2,$$

där R är den lokala krökningsradien

som är ≥ 0 för Ω konvext (se CDE sid 525 ff.)

Tillämpn. på lösn. till Poissons ekv.

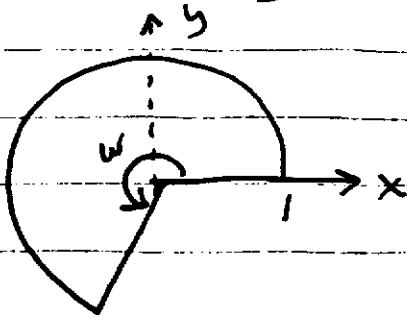
Notera: $-\Delta u = f$ i Ω , $u=0$ på $\partial\Omega$,

\Rightarrow

$$\|D^2 u\| \leq C \|f\|.$$

Hörnsingulariteter

Ex. Tag $\Omega = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \omega\}$



och $u = r^{\pi/\omega} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$.

Noterar att

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,$$

men att $D^2u \notin L_2(\Omega)$ om $\omega > \pi$.

Ex. $\omega = 2\pi \Rightarrow u = r^{1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$, $u'_r = \frac{1}{2}r^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$,

$$u''_{rr} = -\frac{1}{4}r^{-3/2} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right).$$

$$\int_{\Omega} (u''_{rr})^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} r r^{-3} \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) dr d\theta.$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^1 r^{-2} dr = \infty.$$

Övn Visa att för lösn. $u = r^{\pi/\omega} (1-r^2) \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$

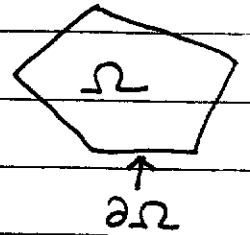
håller $-\Delta u = f$ i Ω , $u=0$ på $\partial\Omega$ gäller

ef $\|D^2u\| \leq C\|f\|$ med $C < \infty$.

Rumsdiskretisering m. finita element

Vill beräkna $u(x)$ s.a.

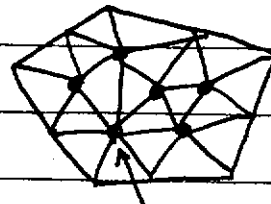
$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega$$



Erinrar oss att

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \text{f\u00f6r alla } v(x) \text{ s.a. } v = 0 \text{ p\u00e5 } \partial\Omega.$$

Triangulerar Ω :



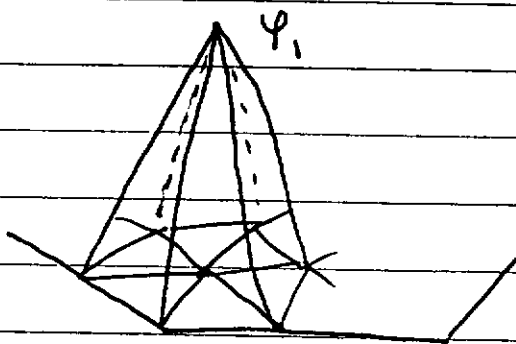
H\u00e4r 6 st inre noder N_i .

Ans\u00e4tter $U(x) = U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_6 \varphi_6(x)$ d\u00e4r U_i tal

$\varphi_i(N_i) = 1, \quad \varphi_i(N_j) = 0 \text{ } j \neq i, \quad \varphi_i(x)$ linj\u00e4r (affin)

i x p\u00e5 varje triangel/element, $\varphi_i = 0$ p\u00e5

$\partial\Omega$:



S\u00f6ker nu U_i dvs

U_1, \dots, U_6 s.a.

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega} f \varphi_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

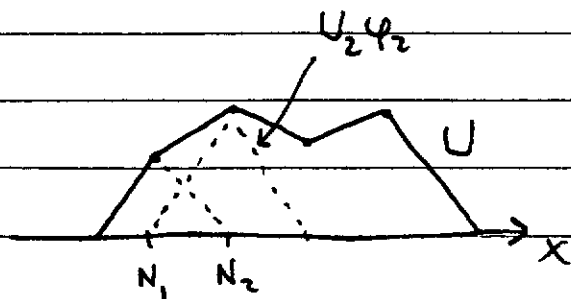
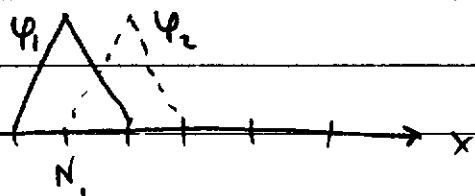
6 ekv., 6 obekanta.

Inr. av $U = \sum U_i \varphi_i$ ger

$$U_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \dots + U_b \int_{\Omega} \nabla \varphi_b \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega} f \varphi_j \quad j=1, \dots, b$$

Obs: Innan nodvärdena U_i kan beräknas måste koefficienterna $\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ och $\int_{\Omega} f \varphi_j$ bestämmas.

I endim. fallet:



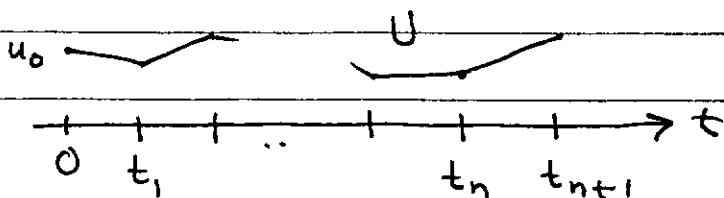
Metoden kallas CG1, continuous Galerkin, degree 1.

Övn. Se CDE 6.2, 8.1.4-6, 15.1.2-8.

Tidsdiskretisering m. FE

Söker $u(t)$ s.a. $\dot{u} + au = f \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$

Ansätter $U(t)$ kont. styckv. linjär CG1:



6:7

Antag att vi beräknat U fram till

$$t_n: \text{ Söker } U(t) = U_n \underbrace{\frac{t_{n+1}-t}{k_n}}_{\varphi_n} + U_{n+1} \underbrace{\frac{t-t_n}{k_n}}_{\varphi_{n+1}} \quad \text{s.a.}$$

$$\int_{I_{n+1}} \dot{U} + aU = \int_{I_{n+1}} f \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{ elw. för en} \\ \text{obel. } U_{n+1} = U(t_{n+1}) \end{array}$$

Obs $\dot{U} = \frac{U_{n+1} - U_n}{k}$ (liknar derivata!)

Vi får (a obero. av t)

$$U_{n+1} - U_n + ak \frac{U_n + U_{n+1}}{2} = \int_{I_{n+1}} f \quad , \quad \text{dvs}$$

$$\left(1 + \frac{ak}{2}\right) U_{n+1} = \left(1 - \frac{ak}{2}\right) U_n + \int_{I_{n+1}} f \quad , \quad \text{varur}$$

U_{n+1} erhålles

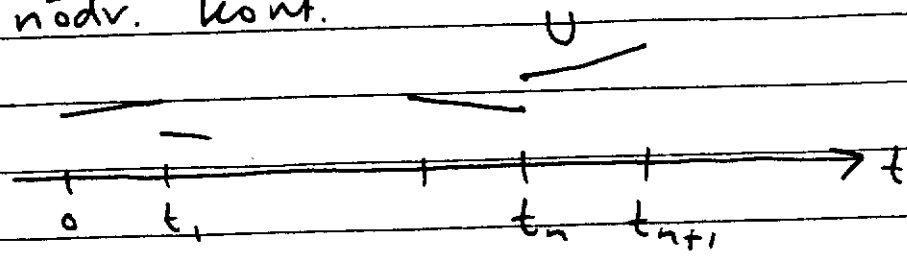
Metoden kallas CG1 eller Crank-Nicolson

CG2: Söker $U(t)$ pol. av grad 2 s.a.

$$\int_{I_{n+1}} (\dot{U} + aU) v = \int_{I_{n+1}} f v \quad \text{för alla } v \text{ av grad 1.}$$

dG1 Ansätter $U(t)$ som styckvis linjär,

ej nödv. kont.

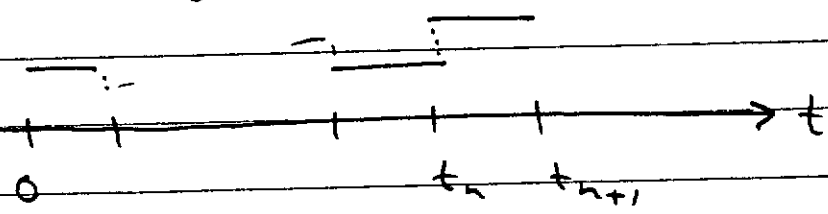


Nu två nödvärden i t_n : U_n^- , U_n^+ .

Metod: Bestäm $U(t)$ s.a.

$$(U_n^+ - U_n^-)v(t_n) + \int_{I_{n+1}} (\dot{U} + aU)v = \int_{I_{n+1}} f v \quad \text{för alla linjära } v(t).$$

dG0 $U(t)$ styckvis konstant



$$(U_n^+ - U_n^-)v(t_n) + \int_{I_{n+1}} aUv = \int_{I_{n+1}} f v \quad \text{för alla konst. } v(t).$$

Reduceras till (a konst. $v=1$) $U_n := U(t), t \in I_{n+1}$

$$(1 + ak_n)U_n = U_{n-1} + \int_{I_{n+1}} f$$

Metoden kallas dG0 eller implicit Euler.

F07

FEM forts.

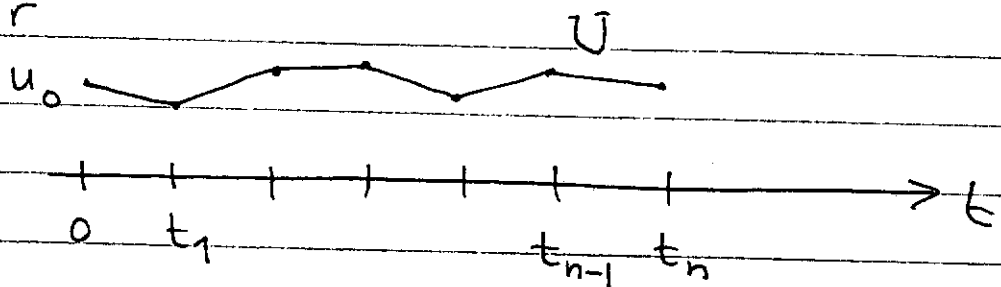
7:1

Har sett att lösn. $u(t)$ till

$$\dot{u} + au = f \quad t > 0, \quad u(0) = u_0$$

kan beräknas t.ex. med cG1:

Ansätter



och bestämmer $U_n := U(t_n)$ m.h.a.

$$\int_{I_n} \dot{U} + aU = \int_{I_n} f \quad \text{där } I_n = [t_{n-1}, t_n]$$

För a konst. förs med $k = t_n - t_{n-1}$,

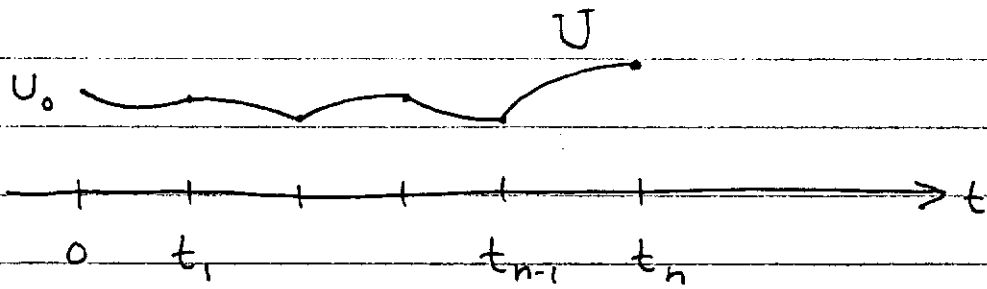
$$U_n - U_{n-1} + a \frac{U_{n-1} + U_n}{2} k = \int_{I_n} f$$

dvs

$$\left(1 + \frac{k}{2} a\right) U_n = \left(1 - \frac{k}{2} a\right) U_{n-1} + \int_{I_n} f$$

Givet $U_0 := u_0$ ger formeln U_1 sedan U_2 o.s.v.

Vid cG2 ansättes



dvs $U(t)$ styckvis kvadratisk i t .

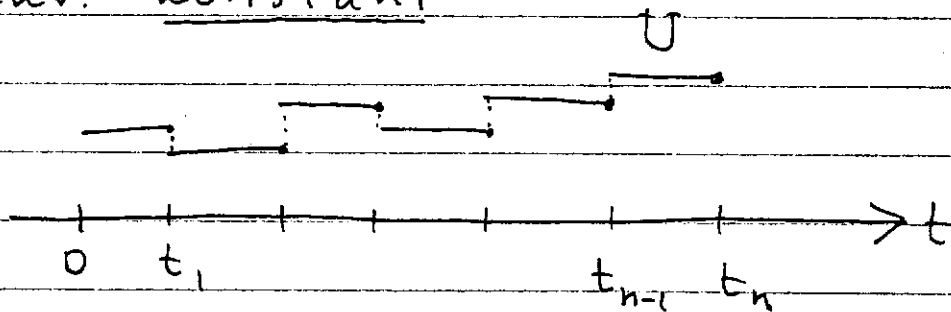
U bestäms av

$$\int_{I_n} (\dot{U} + aU) v = \int_{I_n} f v \quad \text{för alla } v=v(t)$$

som är linjära

Finns också dGO: Ansätter $U(t)$

styckv. konstant



Här bestäms $U_n := U(t)$ för $t \in I_n$ av

$$U_n - U_{n-1} + \int_{I_n} aU = \int_{I_n} f$$

dvs för a konst.

$$(1 + ka) U_n = U_{n-1} + \int_{I_n} f$$

Jfr Euler's metod

7:3

$$U_n = (1 - ka)U_{n-1} + kf_{n-1}$$

Ex. För $k=0.1$, $a=1$, $f=0$ erhålles

$$U_n = 0.9 U_{n-1} = 0.9^2 U_{n-2} = \dots = 0.9^n u_0$$

Motsv. ber. med dGO ger

$$U_n = \frac{1}{1.1} U_{n-1} = \frac{1}{1.1^2} U_{n-2} = \dots$$

Jfr exakt lösn. $u(t) = e^{-t} u_0$

Övn. Beräkna U_n med cG1, dGO och

Euler med $f=0$, $k=0.1$ och a) $a=1$,

b) $a=30$ samt jämför m. exakt lösn.

Övn. Generalisera metoderna till

fallen a) $f(t) = t$ b) $f(t) = e^{-t^2}$ m.

kvadratur c) $a = a(t) = t$.

FEM i en rumsdim

7:4

Söker $u(x)$ s.a.

$$-u'' + u = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 7.$$

Variationsformulerar: (\cdot, v, \int_0^1)

$$\int_0^1 x v(x) = \int_0^1 (-u'' + u) v = -u'v \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' + uv$$

dvs

$$\underbrace{\int_0^1 u'v' + uv}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 x v(x) + 7v(1)}_{l(v)} \quad \text{för alla } v(x) \text{ s.a. } v(0) = 0.$$

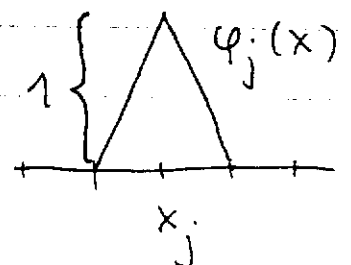
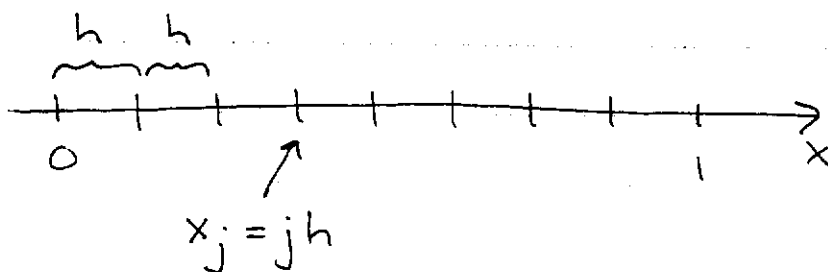
Övn. Variationsformulera

$$-(xu')' = 7, \quad 1 < x < 2, \quad u'(1) = u(1), \quad u(2) = 0$$

(alt. $u(2) = 3$).

FEM: Indelar området $(0,1)$ i m s.t.

delintervall av längd h :



Ansätter $U(x) = U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_m \varphi_m(x)$.

Söker U_k , $k=1, \dots, m$ s.a.

$$\int_0^1 (U' \varphi_j' + U \varphi_j) = \int_0^1 x \varphi_j(x) + 7 \varphi_j(1) \quad j=1, \dots, m.$$

Ins. ger

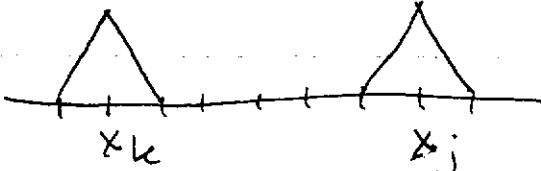
$$U_1 \underbrace{\int_0^1 (\varphi_1' \varphi_j' + \varphi_1 \varphi_j)}_{a_{j1}} + U_2 \underbrace{\int_0^1 \dots}_{a_{j2}} = \underbrace{\int_0^1 x \varphi_j(x) + 7 \varphi_j(1)}_{b_j}$$

dvs ett ekv. system med m ekv. för de
 m obek. U_k :

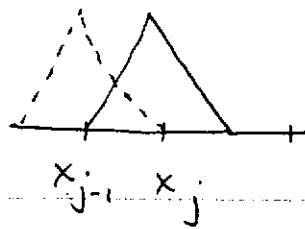
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b \iff U = A^{-1} b$$

där alltså

$$a_{jk} = \int_0^1 \varphi_k' \varphi_j' + \varphi_k \varphi_j$$

Obs:  $\Rightarrow a_{jk} = 0$. A gles!

För $k=j-1$ erhålls



7:6

$$a_{jk} = a_{j,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} + \frac{x_j - x}{h} \cdot \frac{x - x_{j-1}}{h} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{6}h$$

$$b_j = \int_0^1 x \varphi_j(x) = x_j \int_0^1 \varphi_j = hx_j, \quad j < m \quad \text{o.s.v.}$$

Sammanfattningsvis

$$A = S + M$$

$$S = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & ? \end{bmatrix}$$

$$M = h \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$b = h^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m-1 \\ ? \end{bmatrix}$$

FE i rum och tid

Betrakta v.l.ekv.

$$\ddot{u} - u'' = f, \quad u(0,t) = 0, \quad u'(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1$$

Variationsformulor

$$\int_{I_n} \int_0^1 \ddot{u}v + \dot{u}'v' = \int_{I_n} \int_0^1 f v \quad \text{alla } v: v(0,t) = 0.$$

Ansätter $U(x,t) = U_{n-1}(x)\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\psi_n(t)$

där $\psi_n(t) = \frac{t-t_{n-1}}{k}$ och

$$U_n(x) = U_{n,1}\varphi_1(x) + U_{n,2}\varphi_2(x) + \dots + U_{n,m}\varphi_m(x),$$

dvs U styckvis linjär i tid o. rum.

Nodvärdena $U_{n,k}$ best. av

$$\int_{I_n} \int_0^1 \ddot{U}\varphi_j + \dot{U}'\varphi_j' = \int_{I_n} \int_0^1 f\varphi_j \quad j=1, \dots, m$$

\swarrow \searrow
 $\frac{U_n - U_{n-1}}{k}$ $U_{n-1}'\psi_{n-1} + U_n'\psi_n$

dvs

$$\underbrace{\int_0^1 U_n \varphi_j}_{MU_n} = \underbrace{\int_0^1 U_{n-1} \varphi_j}_{MU_{n-1}} + \underbrace{\int_{I_n} \psi_{n-1}}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 U_{n-1}' \varphi_j'}_{SU_{n-1}} + \underbrace{\int_{I_n} \psi_n}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 U_n' \varphi_j'}_{SU_n}$$

dvs

$$= \underbrace{\int_{I_n} \int_0^1 f \varphi_j}_{F}$$

$$(M + \frac{k}{2} S) U_n = (M - \frac{k}{2} S) U_{n-1} + F,$$

vilket ger $U_n = \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ \vdots \\ U_{n,m} \end{bmatrix}.$

Övn. Formulera motsv. elw. system för
dGO tidsstegning.

Fö 8 FEM f. vägelw.

8:1

Söker $u(x,t)$ s.a.

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, & 0 < x < 1, & t > 0 \\ u(0,t) = 0, & u'(1,t) = g(t), & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Skriver om som system:

$$\begin{cases} \dot{u} - v = 0 \\ \dot{v} - u'' = 0. \end{cases}$$

Övn. Skriv som $\dot{w} + Aw = 0$ med $w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$.

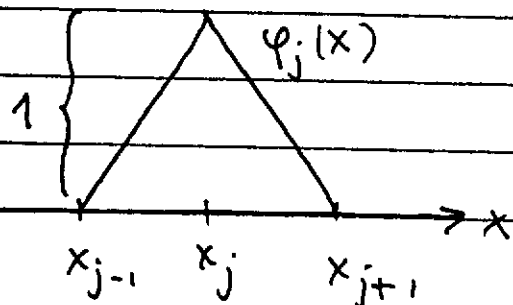
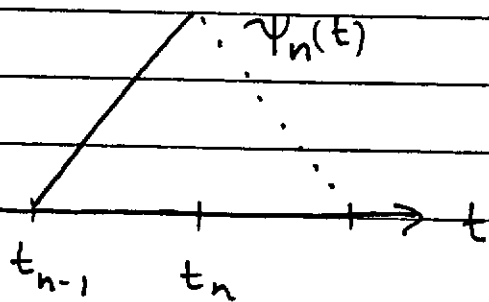
Ansätter

$$U(x,t) = U_{n-1}(x) \Psi_{n-1}(t) + U_n(x) \Psi_n(t), \quad t \in I_n$$

$$V(x,t) = V_{n-1}(x) \Psi_{n-1} \dots$$

där

$$U_n(x) = U_{n,1} \varphi_1(x) + \dots + U_{n,m} \varphi_m(x) \quad \text{o.s.v.}$$



Noterar att $\dot{u} - v = 0 \quad t \in I_n \Leftrightarrow$

$$\int_{I_n} \int_0^1 \dot{u} \varphi - \int_{I_n} \int_0^1 v \varphi = 0 \quad \text{för alla } \varphi(x,t)$$

och att $\dot{v} - u'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'(1,t) = g(t) \Leftrightarrow$

$$\int_{I_n} \int_0^1 \dot{v} \varphi + \int_{I_n} \int_0^1 u' \varphi' - \int_{I_n} \left. u' \varphi \right|_{x=0}^{x=1} = 0 + \int_{I_n} g(t) \varphi(1,t)$$

för alla φ s.a. $\varphi(0,t) = 0$.

Söker därför $U(x,t)$ & $V(x,t)$ som ovan s.a.

$$\int_{I_n} \int_0^1 \underbrace{\frac{U_n(x) - U_{n-1}(x)}{k}}_{\dot{U}} \varphi_j(x) - \int_{I_n} \int_0^1 \underbrace{(V_{n-1} \psi_{n-1} + V_n \psi_n)}_V \varphi_j = 0$$

$j = 1, \dots, m$

och

$$\int_{I_n} \int_0^1 \underbrace{\frac{V_n(x) - V_{n-1}(x)}{k}}_{\dot{V}} \varphi_j(x) + \int_{I_n} \int_0^1 \underbrace{(U'_{n-1} \psi_{n-1} + U'_n \psi_n)}_{U'} \varphi_j' = \int_{I_n} g(t) \varphi_j(1),$$

$j = 1, \dots, m.$

Detta reduceras till

8:3

$$\int_0^1 U_n(x) \varphi_j(x) - \frac{k}{2} \int_0^1 V_n(x) \varphi_j(x) = \int_0^1 U_{n-1} \varphi_j + \frac{k}{2} \int_0^1 V_{n-1} \varphi_j$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{MU_n} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{MV_n} \quad \quad \quad j=1, \dots, m$

resp.

$$\int_0^1 V_n(x) \varphi_j(x) + \frac{k}{2} \int_0^1 U_n(x) \varphi_j(x) = \int_0^1 V_{n-1} \varphi_j - \frac{k}{2} \int_0^1 U_{n-1} \varphi_j + g_n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{MV_n} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{SU_n}$

där

$$S = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad M = h \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

$$U_n = \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ \vdots \\ U_{n,m} \end{bmatrix}, \quad g_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ g_{n,m} \end{bmatrix}, \quad g_{n,m} = \int_0^1 g(t) \cdot \mathbb{I}_n$$

Dvs U_n, V_n bestäms av

$$\begin{cases} MU_n - \frac{k}{2} MV_n = MU_{n-1} + \frac{k}{2} MV_{n-1} \\ \frac{k}{2} SU_n + MV_n = -\frac{k}{2} SU_{n-1} + MV_{n-1} + g_n \end{cases}$$

System av $2m$ ekvat. och obekanta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & -\frac{k}{2}S \\ \frac{k}{2}S & M \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix}}_W = \underbrace{\begin{bmatrix} M & \frac{k}{2}M \\ -\frac{k}{2}S & M \end{bmatrix}}_b \begin{bmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_n \end{bmatrix}$$

$W = A \setminus b, \quad U_n = W(1:m), \quad V_n = W(m+1:2m).$

Övn. Ställ upp motsv. system för tidsstegning med dGO.

Övn. (Energikonserverande) Visa att CG1-CG1 för vägelw. på systemform med $g(t)=0$ är energikonserverande:

$$\|U'_n\|^2 + \|V_n\|^2 = \|U'_{n-1}\|^2 + \|V_{n-1}\|^2$$

Tips. Mult. elw 1 med $(U_{n-1} + U_n)^t S M^{-1}$ och elw 2 med $(V_{n-1} + V_n)^t$ och addera de två. Utnyttja sedan (bl.a.) att

$$U_n^t S U_n = \|U'_n\|^2,$$

där $U_n = \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ \vdots \\ U_{n,m} \end{bmatrix}$ resp. $U_n = U_n(x) = U_{n,1} \varphi_1(x) + \dots$

Övn Enl. Fö7 leder cG1 tillämpad

på $\dot{w} + aw = 0$ som i övn. 1 till

$$W_n(x) - W_{n-1}(x) + \frac{k}{2} a (W_{n-1}(x) + W_n(x)) = 0,$$

där $W_n = \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix}$. Verifiera att en cG1

rumsdiskr. av denna elw. leder till

samma system som ovan.

Övn. Tillämpa cG1 tidsdiskr. direkt på

vågekv., dvs ansätt

$$\tilde{U}(x,t) = U_{n-1}(x) \psi_{n-1}(t) + U_n(x) \psi_n(t), \quad t \in I_n.$$

Notera att \tilde{U} är styckvis konst. i tidsled

och tolka

$$\underbrace{\int_{I_n} \int_0^1 \ddot{U} \varphi_j}_{?} + \underbrace{\int_{I_n} \int_0^1 U' \varphi_j'}_{\frac{k}{2} S(U_{n-1} + U_n)} = \underbrace{\int_{I_n} g(t) \varphi_j(1)}_{g_n}, \quad j=1, \dots, m$$

Övn. Visa att FEM med stegl. h för

8:6

problemet $-u'' = 1$, $0 < x < 1$, $u(0) = 7$, $u'(1) = 0$

med ansatsen

$$U(x) = 7\varphi_0(x) + U_1\varphi_1(x) + \dots + U_m\varphi_m(x)$$

leder till ekv. systemet

$$\tilde{A}U = \tilde{b}$$

där

$$\tilde{A} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 7 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} h \\ \vdots \\ h \\ h/2 \end{bmatrix}$$

$m \times (m+1)$

$(m+1) \times 1$

$m \times 1$

som reduceras till $AU = b$ med

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} h + 7/h \\ h \\ \vdots \\ h \\ h/2 \end{bmatrix}$$

Övn. Ställ upp en FEM för probl.

$$\ddot{u} + \dot{u} - u'' = f, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

$$u(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Övn. Antag att $u = u(x)$ uppfyller

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \text{för alla } v(x) \text{ s.a. } v(0) = 0.$$

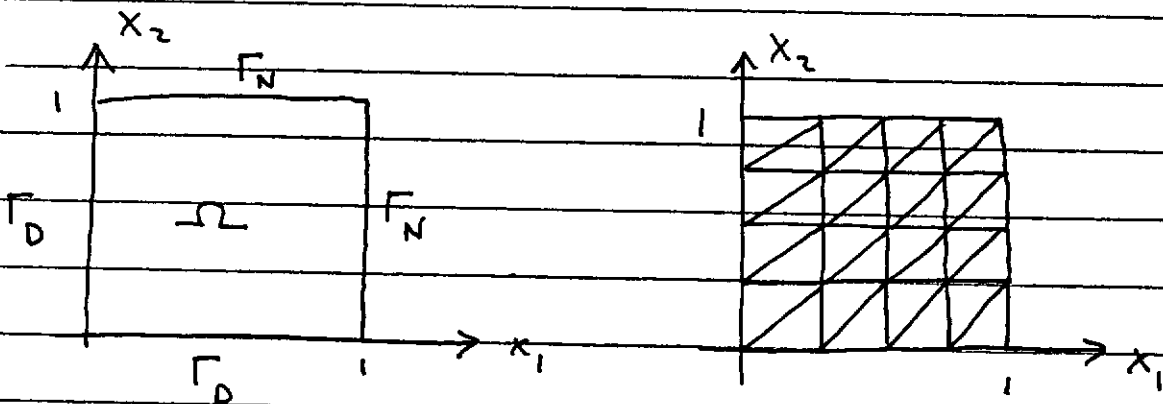
Visa att $-u'' = f$ för $0 < x < 1$, och att

$$u'(1) = 0.$$

Övn. Betrakta problemet

$$-\Delta u = 1 \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \Gamma_D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{på } \Gamma_N \quad \text{med beteckn. enl. fig.}$$

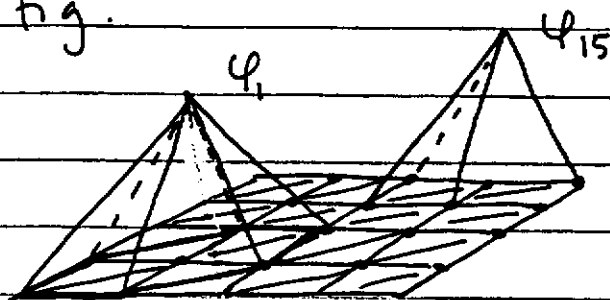


Triangulera Ω enl. fig. och ansätt

$$U(x) = U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_{16} \varphi_{16}(x),$$

där $x = (x_1, x_2)$ och φ_j basfunktioner

enl. fig.



och bestäm U_1, \dots, U_{16} m.h.s.

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega} \varphi_j \quad j=1, \dots, 16$$

Övn. Generalisera till

$$-\nabla(a \nabla u) = f \quad \text{i } \Omega, \quad u=0 \quad \text{på } \Gamma_D,$$

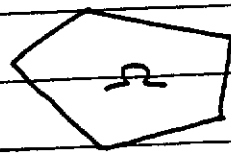
$$a \frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{på } \Gamma_N,$$

där $a=1$ för $x_1 < .5$, $a=2$ för $x_1 > .5$,

$f = x_2$, och med triangelsida h .

Fö 9 Feluppsk. f. FEM

För Poisson problemet



$-\Delta u = f$ i Ω , $u = 0$ på $\partial\Omega$.

där $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d=1,2,3$, med variationsformulering:

Ann u s.a. $u = 0$ på $\partial\Omega$ &

(1) $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$ för alla v s.a. $v = 0$ på $\partial\Omega$.

FEM: T triangulering av Ω , $T = \{K : \cup K = \Omega\}$,

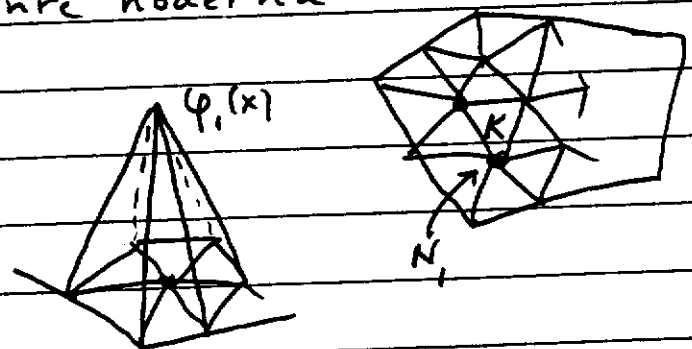
φ_j , $j=1, \dots, n$ motrv. basfunktioner s.a.

$\varphi_j(x)$ kont, linjär i x på varje K ,

och $\varphi_j(N_i) = 1$ om $i=j$, $= 0$ om $i \neq j$,

där N_1, \dots, N_n är de inre noderna

i trianguleringen.



Ansätter:

$U(x) = U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_n \varphi_n(x)$ och söker U_1, \dots, U_n

s.a.

$$\int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega} f \varphi_j \quad j=1, \dots, n,$$

 \Leftrightarrow

$$(V_h) \quad \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \text{för alla } v \in V_h,$$

där $V_h = \{v(x) : v \text{ kont., } v \text{ styckvis linjär i } x$
 $\text{m.c.p. } T, \text{ \& } v=0 \text{ på } \partial\Omega\}.$

OBS: För $v \in V_h$ gäller

$$v(x) = v(N_1) \varphi_1(x) + \dots + v(N_n) \varphi_n(x).$$

För felet $e = u - U$ gäller: (V) - (V_h)

$$\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v = 0 \quad \text{för alla } v \in V_h.$$

Vi får nu:

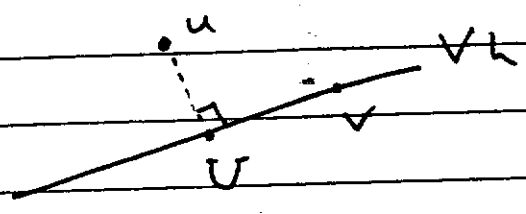
$$\begin{aligned} \|\nabla e\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (u - U) = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla u - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla U}_{=0} \\ &= \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla u - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla v}_{=0} = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (u - v) \end{aligned}$$

$$\leq \|\nabla e\| \|\nabla (u - v)\|,$$

dvs

$$\|D(u-U)\| \leq \|D(u-v)\| \text{ f\u00f6r alla } v \in V_h.$$

Dvs U ligger n\u00e4rmare u \u00e4n alla andra v i V_h .



Felet $u-U$ \u00e4r ortogonalt mot V_h .

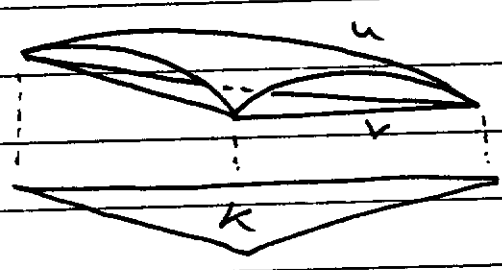
Kan visas att det finns $v \in V_h$ s.a.

$$\|D(u-v)\| \leq C \|h D^2 u\|,$$

d\u00e4r $h = h(x) = \text{diam}(K)$ f\u00f6r $x \in K$, C konst.

ober. av h . G\u00e4ller t.ex. om v inter-

polerar u i noderna N_i



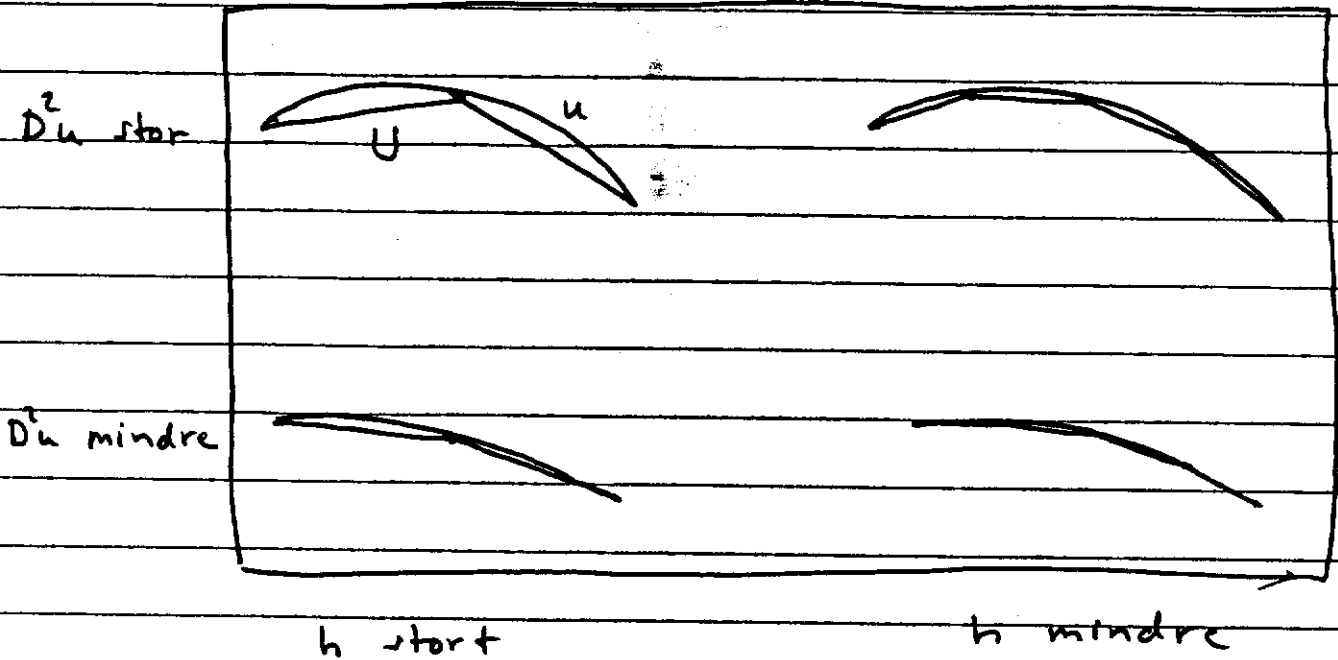
Vi f\u00e5r allts\u00e5

$$\|D(u-U)\| \leq C \|h D^2 u\|.$$

9:4

som visar att felet litet om

$h(x)$ tillr. litet, ber. på D^2u :



Uppsk. av $u-U$

Låt φ vara lösn. till $(e = u-U)$

$$-\Delta\varphi = e \text{ i } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

Då får

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} e(-\Delta\varphi) = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla\varphi = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla(\varphi - v)$$

$$\leq \|\nabla e\| \|\nabla(\varphi - v)\| \quad \text{för alla } v \in V_h.$$

Välj nu v s.a.

$$\|\nabla(\varphi-v)\| \leq C \|h D^2 \varphi\| \leq C \max_{\Omega} h \|D^2 \varphi\|$$

och utnyttja att $\|D^2 \varphi\| \leq C_{\Omega} \|\Delta \varphi\| = C_{\Omega} \|e\|$.

Vi får då, efter som $\|\nabla e\| \leq C \|h D^2 u\|$, att

$$\|u-U\| \leq C_{\Omega} C \max_{\Omega} h \|h D^2 u\| \quad \text{Extra } h!$$

Uppsk. av a priori typ, ger begränsning

av felet a priori beräkning av U .

A posteriori feluppsk. av $u-U$, $d=1$.

Nu $-\varphi'' = e$, $0 < x < 1$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Vi får

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} e'(\varphi-v)' = \int_{\Omega} \underbrace{(-e'')}_{r=f+U''} (\varphi-v)$$

$$\leq \|h^2 r\| \|h^{-2}(\varphi-v)\| \leq C \|h^2 r\| \|e\|$$

om v är interpolanten av φ , dvs

$$(*) \quad \|u-U\| \leq C \|h^2 r\|, \quad \text{där } r=f+U'' \text{ är}$$

residualen. Här gäller $r = f$,

eftersom $U'' = 0$ på varje K .

Övn Visa att $\|(u-U)'\| \leq C \|h r\|$.

Övn Verifiera att för φ 's interpolant v gäller

$$\|h^{-2}(\varphi-v)\| \leq C \|\varphi''\|$$

och

$$\|h^{-1}(\varphi-v)\| \leq C \|\varphi'\|$$

Övn Härled motsvarigheten till (*) för $d=2$.

Notera att $\nabla e(\varphi-v)$ nu ej $\bar{a} = 0$ mellan

elementen, som för $d=1$. (se boken)

Fö 10 Felanalys (forts.)

10:1

Betrakta värmel. probl.

$$\begin{cases} u - u'' = f & \text{i } \Omega = (0,1), t > 0 \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega, t > 0 \\ u = u_0 & \text{i } \Omega, t = 0. \end{cases}$$

Söker $U(x,t) = U_{n-1}(x)\Psi_{n-1}(t) + U_n(x)\Psi_n(t)$,

$$U_n(x) = U_{n,1}\varphi_1(x) + \dots + U_{n,m}\varphi_m(x) \quad \text{s.a}$$

$$\int_{I_n} \dot{U}\varphi_j + U'\varphi_j' = \int_{I_n} f\varphi_j \quad j=1, \dots, m$$

\Leftrightarrow

$$\int_{I_n} \dot{U}v + U'v' = \int_{I_n} fv \quad \text{för alla } v \in V_h,$$

$$V_h = \{v(x) : v \text{ kont., st. linj, } v(0) = v(1) = 0\}$$

Obs. Detta gäller för u , för alla

$$v(x,t) \quad \text{s.a.} \quad v(0,t) = v(1,t) = 0.$$

Dvs. för felet $e = u - U$ gäller

$$\int_{\text{In } \Omega} \dot{v} + e'v' = 0 \quad \text{för } v \in V_L.$$

(10:2)

Låt nu $\varphi(x, t)$ lösa

$$\begin{cases} -\dot{\varphi} - \varphi'' = 0 & \text{i } \Omega, t < T, \\ \varphi = 0 & \text{på } \partial\Omega, t < T \\ \varphi = e & \text{i } \Omega \text{ för } t = T, \end{cases}$$

där $e = e(T) = e(\cdot, T) = u(\cdot, T) - U(\cdot, T)$,

$T = t_N$. Noterar att för $w(x, t) = \varphi(x, T-t)$

gäller

$$\begin{cases} \dot{w} - w'' = 0 & \text{i } \Omega, t > 0 \\ w = 0 & \text{på } \partial\Omega, t > 0 \\ w = e & \text{i } \Omega, t = 0 \end{cases}$$

Har sett att

$$\int_{\varepsilon}^T \|\dot{w}\| \leq \sqrt{\ln \frac{T}{\varepsilon}} \|e\|$$

dvs

$$\int_0^{T-\varepsilon} \|\dot{\varphi}\| \leq \sqrt{\ln \frac{T}{\varepsilon}} \|e\|,$$

&

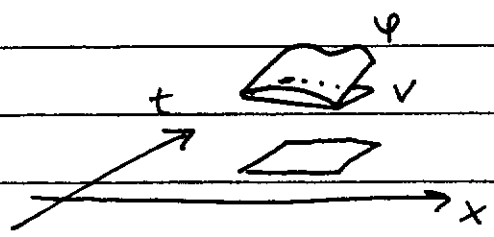
$$\int_0^{T-\varepsilon} \|\varphi''\| \leq \sqrt{\ln \frac{T}{\varepsilon}} \|e\|.$$

Vi har nu (antar $u_0 \in V_h$)

$$\|e(\tau)\|^2 = \int_{\Omega} e(\tau) e(\tau) + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} e(-\dot{\varphi} - \varphi'') \underbrace{=}_0$$

$$= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \dot{e}\varphi + e'\varphi' = \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \dot{e}(\varphi - v) + e'(\varphi - v)'$$

$$= \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \underbrace{(f - \ddot{u} + u'')}_{=r} (\varphi - v) \underbrace{'' \leq k\dot{\varphi} + h^2\varphi''''}_{''}$$



Här $h = h(x, t)$
 $k = k(t)$
 $k = k(x, t) ?$

Erhåller "väsentligen"

$$\|e(\tau)\|^2 \leq \int_0^{\tau} \|(k+h^2)r\| (\|\dot{\varphi}\| + \|\varphi''\|)$$

$$\leq \max_{[0, \tau]} \|(k+h^2)r\| \left(\int_0^{\tau-\epsilon} \|\dot{\varphi}\| + \|\varphi''\| + \max_{[T-\epsilon, T]} \|\varphi\| \right)$$

$$\leq \sqrt{\ln \frac{T}{\epsilon}} \|e\|$$

vilket ger

$$\|e(\tau)\| \leq \max_{[0, \tau]} \|(k+h^2)r\| \sqrt{\ln \frac{T}{\epsilon}}$$

Adaptivitet

10:4

Utgår från a posteriori uppsk. av $e = u - U$:

T.ex. för $-\Delta u = f$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u = 0$ på $\partial\Omega$,

$$\| \nabla e \| \leq C \| h r(U) \|,$$

där $r(U) = |f| + \max_{\partial k} |[\nabla U]|$, $[]$ beteckn. hoppet.

Algoritm

1. Tag godtyckligt $h = h(x)$.

2. Givet h , beräkna motsv. U .

3. Om $C \| h r(U) \| \leq \text{tol}$ så acceptera U .

Annars, bestäm nytt $h = h(x)$ och gå till 2. ●

I regel figurerar även en duallösning i algoritmen. Ex

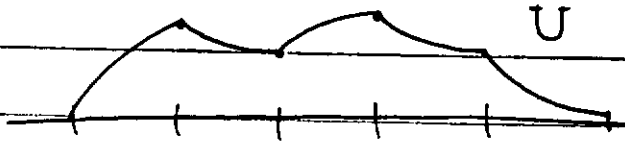
$$|e(x_0)| \leq \int_{\Omega} |h r(U)| |\nabla^2 \varphi|,$$

där $-\Delta \varphi = \delta(\cdot - x_0)$ i Ω , $\varphi = 0$ på $\partial\Omega$.

Högre ordn. element

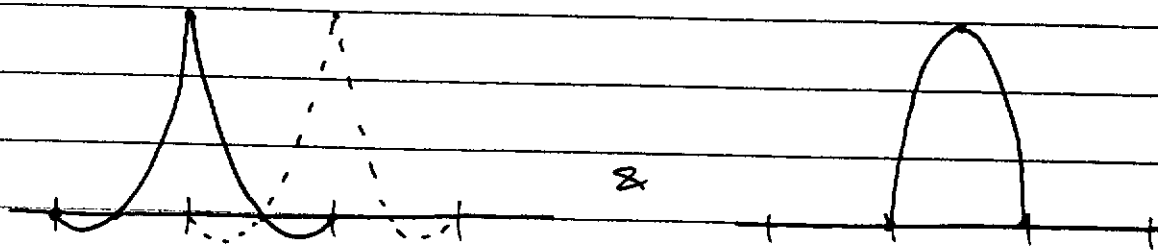
10:57

C^2 styckv. kvadratiske polynom



Bestäms av "ändpunktsvärdena plus mitt-
punktsvärdet på resp. delintervall.

Byggs m.h.a. basfunktionerna



Feluppsk.

$$\| (u-U)' \| \leq C \| h^2 D^3 u \|$$

$$\| u-U \| \leq C \max h \| h^2 D^3 u \|$$

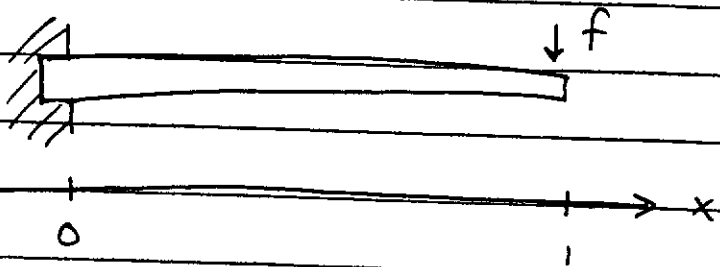
$$\| u-U \| \leq C \| h^2 r \|, \quad \text{där nu } |r(U)| \leq Ch$$

för $-u'' = f$, $0 < x < 1$, med randvillk.

Balkekvationen

10:6

$$\begin{cases} (au'')'' = f & \text{i } \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ \& } u'(0) = 0 & \text{Dirichlet} \\ u''(1) = 0 \text{ \& } (au'')'(1) = 0 & \text{Neuman} \end{cases}$$



a böjstyvheten, au'' momentet, f lasten
 $u = u(x)$ "nedböjningen".

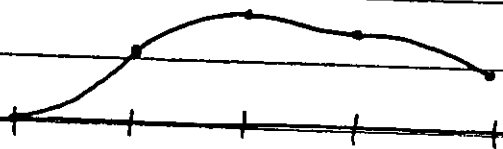
Variationsform:

$$\int_0^1 au''v'' = \int_0^1 fv \quad \text{för alla } v(x) \text{ s.a.}$$

$$v(0) = 0 \text{ \& } v'(0) = 0.$$

FEM styckvis linjära funkar ej!

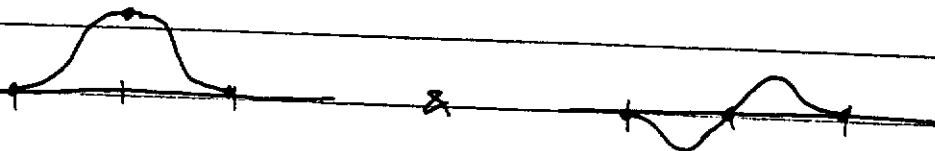
Jobbar istället med styckv. kubiska pol.
med kont. derivata.



2 frihetsgrader i
varje nod.

Kubisk på (a,b) best. av $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi(b)$ \& $\varphi'(b)$.

Bas:



Fö 10 Kompletterande mtrl

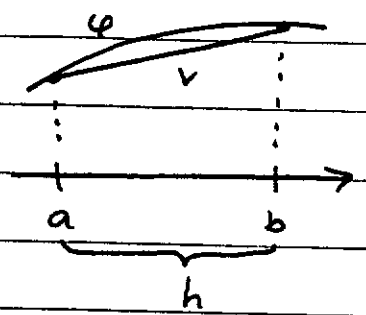
Övn Antag $x, \bar{x} \in I = [a, b]$ & $w(\bar{x}) = 0$.

Visa att

$$(1) \quad |w(x)| \leq \int_I |w'|$$

Övn Antag v interp. φ i a, b :

Visa m.h.a. (1) att



$$|(\varphi - v)(x)| \leq \int_I |(\varphi - v)'|$$

&

$$|(\varphi - v)'(x)| \leq \int_I |(\varphi - v)''| = \int_I |\varphi''|$$

Övn Visa vidare att

$$(2) \quad \max_I |\varphi - v| \leq \max_I |h^2 \varphi''|$$

$$\int_I |\varphi - v| \leq \int_I |h^2 \varphi''|$$

$$\|\varphi - v\|_I \leq \|h^2 \varphi''\|_I \quad \& \quad \|h^{-2}(\varphi - v)\|_I \leq \|\varphi''\|_I,$$

där

$$\|w\|_I = \left(\int_I w^2 \right)^{1/2}$$

Övn. Utnyttja att

$$v' = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^b \varphi' (= \text{konst}) \text{ på } I.$$

för att visa att

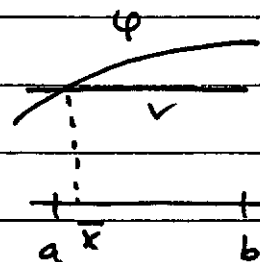
$$|(\varphi - v)(x)| \leq 2 \int_I |\varphi'|$$

och därmed

$$\int_I h^{-1} |\varphi - v| \leq 2 \int_I |\varphi'| \quad \& \quad \|h^{-1}(\varphi - v)\| \leq 2 \|\varphi'\|_I.$$

Övn. Antag nu att $v(t)$

konst. interp. av φ på I :



Visa att

$$(3) \quad \int_I h^{-1} |\varphi - v| \leq \int_I |\varphi'|.$$

Övn. Visa att om $\dot{u} + u = f$, $t > 0$, $u(0) = u_0$,

och U cG1-approxim. av u , så gäller

$$(4) \quad |(u - U)(T)| \leq \max_{[0, T]} |k(f - \dot{U} - U)|.$$

Lösning: Vi utgår fr. telekvationen

$$\int_0^T (\dot{e} + e)v = 0, \quad \text{som här gäller f.} \quad (C)$$

alla styckv. konstanta $v(t)$ ($e = u - U$).

Med φ s.a.

$$-\dot{\varphi} + \varphi = 0, \quad t < T, \quad \varphi(T) = e(T),$$

följer nu

$$|e(T)|^2 = e(T)\varphi(T) + \underbrace{\int_0^T e(-\dot{\varphi} + \varphi)}_{=0} = \int_0^T (\dot{e} + e)\varphi$$

$$= \int_0^T (\dot{e} + e)(\varphi - v) = \int_0^T \underbrace{(f - U - U)}_r (\varphi - v)$$

$$\leq \max_{[0, T]} |kr| \int_0^T k^{-1} |\varphi - v|.$$

Genom att utnyttja (3), och att $\dot{\varphi} = \varphi$ &

$\varphi(t) = \exp(t-T)e(T)$, erhålls

$$|e(T)|^2 \leq \max_{[0, T]} |kr| \underbrace{\int_0^T \exp(t-T) dt}_{=1 - \exp(-T)} |e(T)|,$$

dvs

$$|e(T)| \leq \max_{[0, T]} |kr| \quad \text{v. s. v.}$$

Övn. Generalisera till fallet

$$\ddot{u} + au = f, \quad a = \text{konst.} > 0.$$

Övn. Gäller (4) även för $\ddot{u} - u = f$?

Övn. Studera fallet $d < 0$, $a > 0$.

Övn. (svårare) Antag $\ddot{u} + u = f$, $t > 0$,

och att U är C^1 -approx. Visa att

$$|(u - U)(T)| \leq \max_{[0, T]} |k^2 \ddot{u}| T.$$

"Lösning"

$$|e(t)|^2 = |\theta(t)|^2 = \theta(t) \varphi(t) + \underbrace{\int_0^t \bar{\theta} (-\dot{\phi} + \phi)}_{=0}$$

$$= \int_0^t (\dot{\theta} + \theta) \bar{\phi} = - \int_0^t (\dot{\rho} + \rho) \bar{\phi}$$

$$= - \int_0^t \rho \bar{\phi} \leq \max_{[0, T]} |k^2 \ddot{u}| \int_0^t |\bar{\phi}| \leq \max_{[0, T]} |k^2 \ddot{u}| T |e(t)|,$$

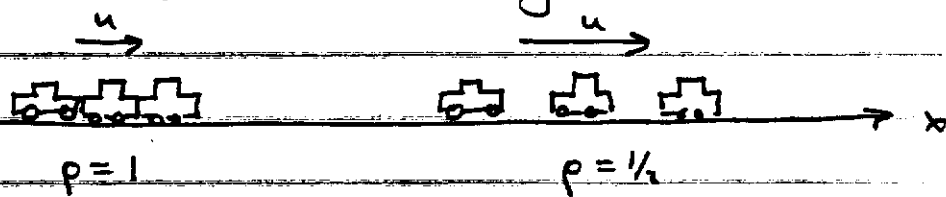
där $\rho = u - \hat{u}$, $\theta = \hat{u} - U$ och $\phi \in C^1$ appr.

av φ s.a.

$$\int_0^t v (-\dot{\phi} + \phi) = 0 \quad \forall \text{ st. konst. } v(t).$$

\hat{u} st.v. linj. int., \bar{w} st.v. konst. medelv.

Betrakta trafikflödet längs en motorväg.



Låt $\rho = \rho(x, t)$ vara "densiteten" bilar ($0 \leq \rho \leq 1$)

och $u = u(x, t)$ bilarnas hastighet. Fixera

ett vägintervall (a, b) . Skillnaden mellan

trafikinflödet $u(a)\rho(a)$ vid $x=a$ och utflödet $u(b)\rho(b)$

vid $x=b$ ger upphov till en densitetökning i

intervallet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx &= \int_a^b \dot{\rho}(x, t) dx = \rho(a)u(a) - \rho(b)u(b) \\ &= - \int_a^b (u\rho)' dx, \end{aligned}$$

eller

$$\int_a^b \dot{\rho} + (u\rho)' dx = 0.$$

Eftersom a, b kan väljas godtyckligt, följer att

$$\dot{\rho} + (u\rho)' = 0.$$

Antag nu att $u = 1 - p$ (Motivera).

11:2

Då får

$$\dot{p} + (p - p^2)' = 0,$$

eller

$$\dot{p} + (1 - 2p)p' = 0,$$

vilket är en ickelinjär konvektions-ew.

(Behandlas utförligt i kursen Pde-i)

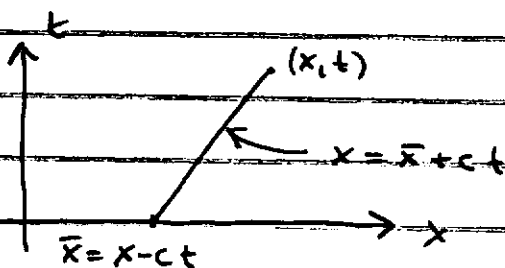
Antag alternativt att $u = c - \varepsilon p'/p$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$

(Motivera!) Då erhålls

$$\dot{p} + cp' - \varepsilon p'' = 0.$$

För $\varepsilon = 0$ ges lösn. av $p(x, t) = p_0(x - ct)$, ty

$p = \text{konst.}$ i rikt n. $(c, 1)$



Byter beteckning $p \rightarrow u$:

$$\dot{u} + \beta u' - \varepsilon u'' = 0.$$

Jämför Navier-Stokes ekv. f. inkompr.

11:3

strömning

$$\bar{u} + (\beta \cdot \nabla) u - \varepsilon \Delta u + \nabla p = 0, \quad \text{div } u = 0,$$

där $\beta = u$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ är hastigheten,

p är trycket, $\varepsilon = \frac{1}{Re}$ där Re är Reynoldstet.

Dessa ekv. svåra att lösa för $\varepsilon > 0$ litet,

p.g.a. gränsskikt och turbulens. Typiska

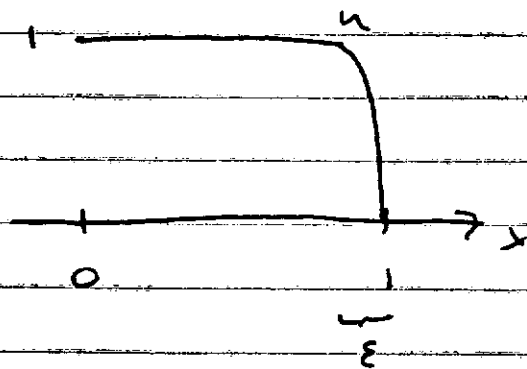
värden på Re är $10^5 - 10^7$, dvs $\varepsilon \ll 1$.

Ex. Betrakta problemet

$$u' - \varepsilon u'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

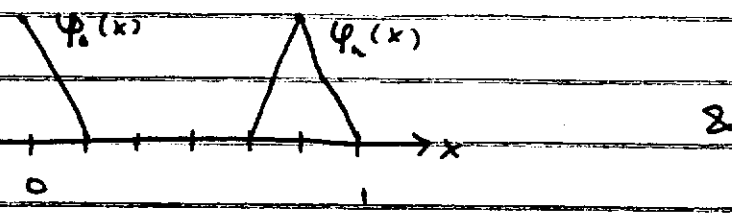
Exakt lösning ges av $u(x) = c(e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{\frac{x}{\varepsilon}})$,

$$c = \frac{1}{(e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1)}$$



Notera utflödes-
gränsskiktet av
vidd $\sim \varepsilon$.

FEM $U(x) = \varphi_0(x) + U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_n \varphi_n(x)$



$$\int_0^1 U' \varphi_j + \epsilon U \varphi_j = 0, \quad j=1, \dots, n$$

ger elv.

$$\frac{1}{2} (U_{j+1} - U_{j-1}) + \frac{\epsilon}{h} (2U_j - U_{j-1} - U_{j+1}) = 0, \quad j=1, \dots, n$$

där $U_0 = 1$ och $U_{n+1} = 0$.

Notera att vi kan skriva

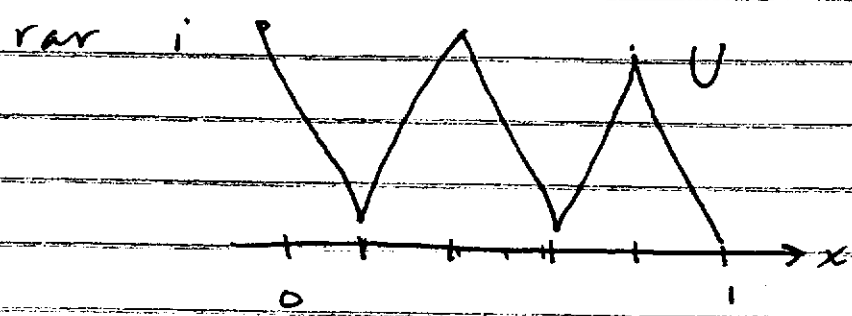
$$\underbrace{\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}}_{\text{ motsv. } u'(x_j)} - \epsilon \underbrace{\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}}_{\text{ motsv. } u''(x_j)} = 0$$

motsv. $u'(x_j)$ motsv. $u''(x_j)$

"centraldifferens"

För ϵ mkt litet får $U_{j+1} \approx U_{j-1}$, dvs

vartannat nodvärde lika, vilket resulterar i



(om n jämnt)

dos oscillationer i U transporteras "uppströms" och gör att U appr. u dåligt i hela området.

En bättre metod är att approximeras $u'(x_j)$ med en "upwindderivata"

$$u'(x_j) \approx \frac{U_j - U_{j-1}}{h}$$

vilket ger bättre stabilitet, om än (formellt) mindre noggrannhet. Exemplet bevisar i själva verket just detta:

Vad hjälper noggrannhet, utan stabilitet!

En mera systematisk metod för att stabilisera FE-lös. till strömningsproblem

är Strömlinjdiffusion: Receptet kan

sägas vara välj $v + \frac{1}{2}\rho h v'$, istället för

bara v , som testfunktion.

För modelprobl. erhålls

11:6

$$\int_0^1 [U'(v + \frac{1}{2}hv') - \epsilon U''(v + \frac{1}{2}hv')] = \int_0^1 f(v + \frac{1}{2}hv')$$

Här märkte termen $\int_0^1 U''v'$ tolkas som

$$\sum_j \int_{I_j} U''v' (= 0 \text{ i detta fall m. styckv. linj.}$$

approx.) Notera att $v = \varphi_j$ ger

$$\int U' \frac{1}{2}h\varphi_j' = U_j - \frac{1}{2}U_{j+1} - \frac{1}{2}U_{j-1}$$

vilket klls. m.

$$\int U' \varphi_j' = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2}$$

ger

$$U_j - U_{j-1}$$

som i uppvindsschemat. Metoden kan även

ses som en sammansvagn. med minsta

kvadratmetoden: u

minimerar $\|w' - f\|$ om $A = \frac{d}{dx}$ $A^t = -\frac{d}{dx}$

$$u' = Au = f$$

$$\int U^t v' = \int f v' \quad \left. \begin{aligned} A^t A u &= A^t f \\ -u'' &= -f \end{aligned} \right\} \cdot v$$

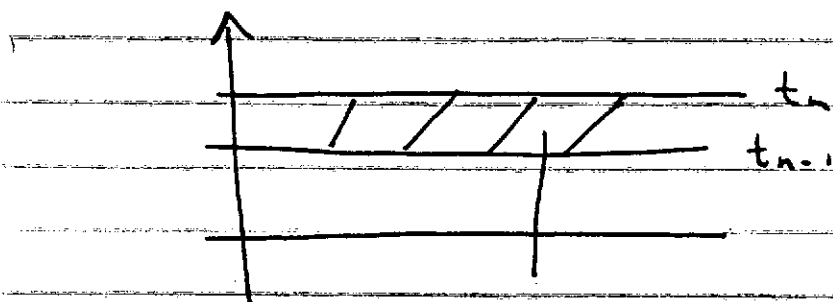
$$-u'' = -f$$

För tirber. konvektions problem

11:7

använder m. fördel orienterade rum-tid
element

$$\dot{u} + \beta u' - \varepsilon u'' = f$$



Använt $U(x,t)$ s.a. U s.v. linj.

i x -led och s.v. konst. i $(\beta, 1)$ -led.

Komb. m. str. linj. diff samt art. visc.

ber. på residual

$$\int_{I_n} (\dot{U} + \beta U') (v + \beta/2 h v') + \hat{\varepsilon} U' v' = \int_{I_n} f (v + \beta/2 h v')$$

Erinran: Styvhetmatris o. Lastvektor

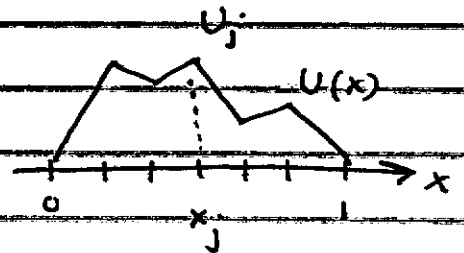
i fallet $-u'' = f$ med homogena

Dirichlet r.v. och elementlängd h är

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 2 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{där}$$

$$b_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f \varphi_j \approx h f_j, \quad f_j = f(x_j), \quad \text{och nodvärdena}$$

$$U_j \quad ; \quad U(x) = U_1 \varphi_1(x) + \dots + U_n \varphi_n(x)$$



$$\text{ges av} \quad AU = b, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Ekv. motsv. rad j i A, b är

$$-\frac{1}{h} U_{j-1} + \frac{2}{h} U_j - \frac{1}{h} U_{j+1} = b_j,$$

som även kan skrivas som

$$-\frac{\frac{U_{j+1} - U_j}{h}}{h} - \frac{U_j - U_{j-1}}{h} = \frac{1}{h} b_j \approx f_j,$$

där v.l. kan tolkas som en fnit

differens approximation av $-u''(x_j)$.

Notera, att ent. Taylors formel gäller för

$$u_j = u(x_j),$$

$$u_{j+1} - u_j = h u_j' + \frac{h^2}{2} u_j'' + \frac{h^3}{6} u_j''' + O(h^4)$$

$$+ u_{j-1} - u_j = -h u_j' + \frac{h^2}{2} u_j'' - \frac{h^3}{6} u_j''' + O(h^4)$$

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = h^2 u_j'' + O(h^4)$$

dvs

$$u''(x_j) = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Tidigare har vi noterat att

$$u'(x_j) = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$$

och

$$u'(x_j) = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + O(h)$$

övn. Vilka differensmetoder motsv.

dG0cG1 resp. cG1cG1 för värmeledn.

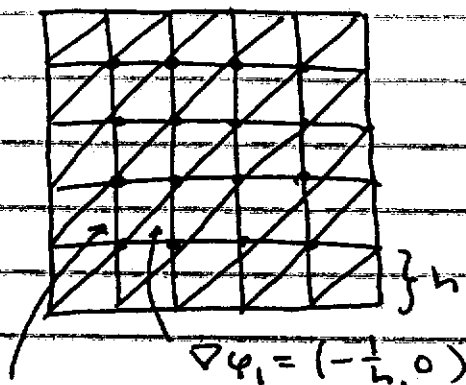
elw $\tilde{u} - u'' = f$.

Styvhetmatrisen för $\Omega = \square$ &

$$-\Delta u = f \text{ i } \Omega, \quad u = 0 \text{ på } \partial\Omega,$$

med triangulering end.

12:3



$$\nabla\varphi_1 = \left(\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right)$$

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 = 4$$

Ω

$A =$

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1 = -1$$

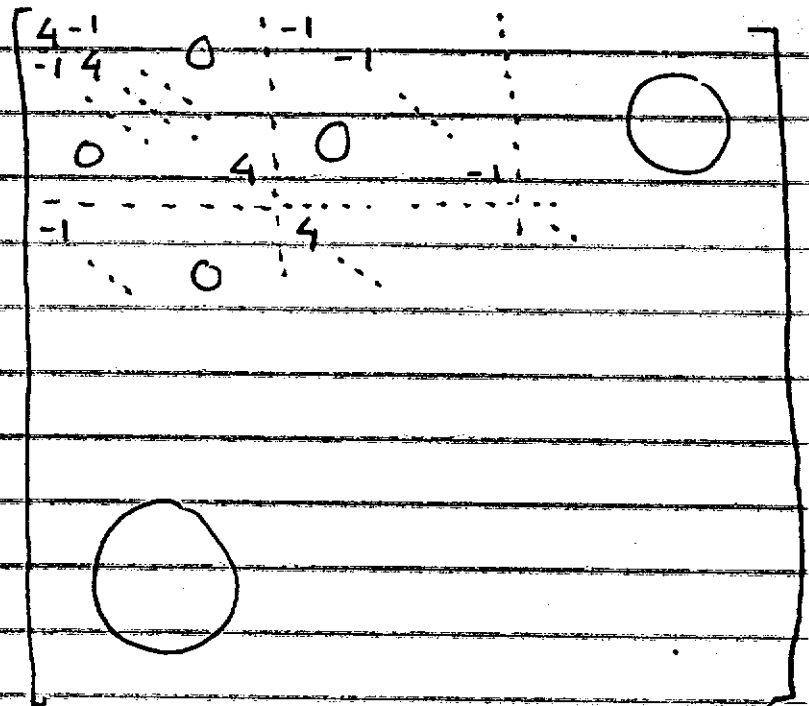
Ω

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_{n+1} \cdot \nabla\varphi_1 = -1$$

Ω

med $n^2 = N$ inre noder

ger av



Vi noterar att A är gles*, bandmatrix
med bandbredd $d = 2n + 1$.

* Endast $\approx 5N$ av totalt N^2 element är

$\neq 0$. Varför lagra alla dessa nollor

i datorns minne? (Jfr. sparsrutiner-

na i Matlab)

Vid Gausselimination krävs

12:4

$\approx \frac{2}{3} N^3$ räkneop. för att lösa $AU = b$,

eller $\sim d^2 N$ om A lagras som

bandmatris.

Övn. Hur många op. blir detta om

$h = 1/100$?

Iterativ lösn. av $AU = b$.

Gradientmetoden eller Steepest descent.

Noterar att $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$ minimerar

$$F(U) = \frac{1}{2} U^T A U - b^T U$$

Övn. Visa detta utgående från att motsv.

$U(x)$ minimerar

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |DU|^2 - \int_{\Omega} fU$$

Beräknar lätt gradienten g till $F(U)$

$$g = AU - b$$

Gradientmetoden är nu:

12:5

$U^{(0)}$ startvektor, godt. &

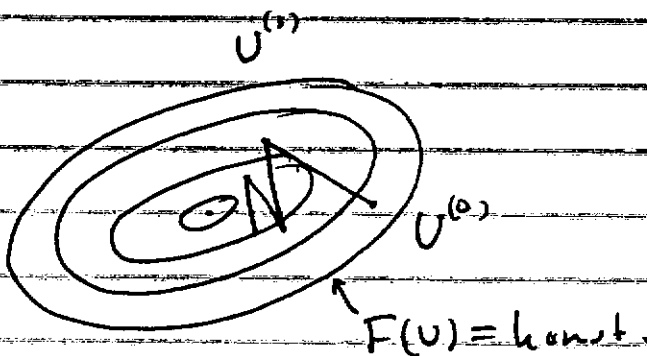
$$U^{(j+1)} = U^{(j)} + \alpha_j g(U^{(j)}) \quad \alpha_j > 0$$

där α_j kan väljas optimal eller

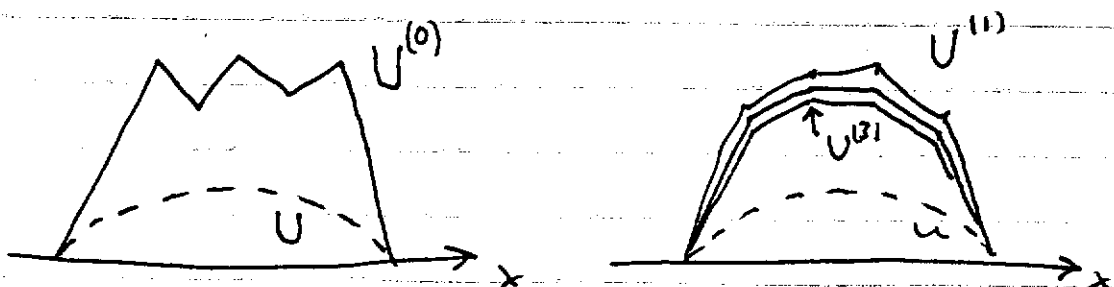
fix.

Övn. Visa att α_j optimal för

$$\alpha_j = \frac{(b^t - U^t A) g}{g^t A g}$$



Gradientmetoden ^{men} konvergerar ^{sedan} långsamt,
men "dämpar snabbt de högfrekventa
delarna av felet".



Multigrid Sätt $v = u - U^{(1)}$, $u = U^{(1)} + v$

och notera att

$$-\Delta v = f + \Delta U^{(1)} = g.$$

Beräkna nu $V \approx v$ m.h.a. FEM på grövre

nät, ok eftersom v snäll. Om V

beräknas med elementdiameter $H = 2h$

blir antalet erforderliga operationer

$$N + \left(\frac{N}{4}\right)^2 \ll N^2 \text{ i } 2d.$$

Notera att $d^2 N \sim N^2$ i $2d$ och att

ett gradientsteg kräver $\sim N$ operationer.

Om även v beräknas enl. samma princip

erhåller multigridmetoden med antal

operationer \sim

$$N + \frac{N}{4} + \frac{N}{16} + \dots + 1 \sim N$$

Dvs, ekvationerna kan lösas utan arbete.

Ex.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(u) \operatorname{grad} u) = f & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

$a(u)$ temp. beroende värmeledn. förm.

Variationsform:

$$\int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \text{för } v \text{ s.a. } v = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

FEM Ansätter $U = U_1 \varphi_1 + \dots + U_m \varphi_m$, $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}$

$$\int_{\Omega} a(U) \nabla U \cdot \nabla \varphi_j = \int_{\Omega} f \varphi_j \quad j = 1, \dots, m$$

Obs Kan ej skrivas på formen $AU = b$,

med given matris A , men väl

$$A(U)U = b$$

där

$$A(U) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} a(U) \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 & \dots & \int_{\Omega} a(U) \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\Omega} a(U) \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_1 & \dots & \int_{\Omega} a(U) \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_m \end{bmatrix}$$

Iterativ lösning.

I. "Picard"

$$* \quad A(U^{(n)}) U^{(n+1)} = b$$

ger sekvens $U^{(0)}, U^{(1)}, U^{(2)}, \dots$ med $U^{(n)} \rightarrow U$

i bästa fall.

$$\text{Varför inte } A(U^{(n+1)}) U^{(n)} = b ?$$

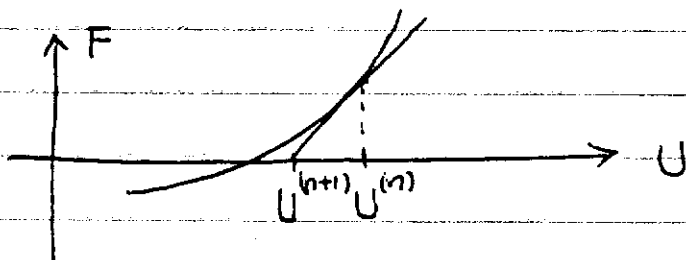
- ej linjärt
- ej konvergens

* OK om A' liten t_n

$$A(U^{(n)}) (U^{(n+1)} - U) = \underbrace{[A(U) - A(U^{(n)})]}_{\sim -A'(U^{(n)})} U$$

II "Newton"

$$F_j(U) = \int_{\Omega} a(U) \nabla U \cdot \nabla \varphi_j - \int_{\Omega} f \varphi_j = 0$$



$$W = U^{(n+1)} - U^{(n)}, \quad U = U^{(n)}$$

13:3

Newton:
$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - \frac{F(U^{(n)})}{F'(U^{(n)})}$$

eller

$$F'(U)W = -F(U)$$

där

$$F'(U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} F_1(U) \\ \vdots \\ F_m(U) \end{bmatrix}$$

Övn. Undersök föruts. för konv. av Picardit.

om $a(u) = 1 + \epsilon u^2$, $\epsilon > 0$ litet.

Övn. Bestäm $\frac{\partial F_1}{\partial U_2}$ i fallet $a(u) = 1 + \epsilon u^2$.

Övn. Lös $-(a(u)u')' = 1$, $0 < x < 1$, $u(0) = u(1) = 0$,

med $a(u) = 1 + \epsilon u^2$ med a) Picard b) Newton.

Övn. Sök lösn. till $-u'' = f(u)$, $0 < x < 1$,

$u(0) = u(1) = 0$ med lämpl. $f(u)$ av intresse.