Spec Rel 24/10-11 Måndag LV 1

Kursens innehåll / lärandemål

Bokens 7 första kapitel

1) Historisk översikt och relationen till Newtons mekanik
2) Lorentztransformationen
3) Relativistisk kinematik
   - längdkontraktion
   - tidsdilatation
   - "relativ tid" (tvillingparadoxen)
4) Relativistisk optik
   - dopplereffekten
5) Rumtid och 4-vektorer
6) Relativistisk mekanik $(E = mc^2)$
7) Elektromagnetism
   - Maxwells ekv.
   - Tensorer

Dagens mål: Historisk bakgrund, introducera och motivera nya begrepp

Relativitetsteori

- Fysikalisk teori/modell
- Syftar till att beskriva verkliga strukturer i naturen under vissa antaganden.
- Möjligt att motbevisa teorin.
- Ersätter absolut rum och tid med rumtid
  efterföljande korrigeringar $\Longrightarrow$ Relativistisk fysik

Vad menar vi med relativitet?

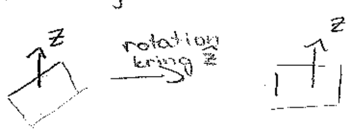
- Relativitet hos en fysikalisk teori uttrycks i termer av den symmetri som teorin har.

  symmetri — den grupp av transformationer som lämnar rörelseekvationerna invarianta.

Grupp

1) Sluten $a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G$
2) Associativ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3) Identitet $e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in G$
4) Invers $\exists a^{-1}$ s.a. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad \forall a \in G$

Ex
Rotation kring en vertikal axel



Resultaten av alla experiment, samma före och efter rotationen

$\Longrightarrow$

Naturlagarna invarianta under rotation kring $\hat{z}$

Newtons mekanik – invariant under Galileiska tranformationer

Speciell relativitetsteori (SR) – invariant under $\underbrace{\text{allmänna Lorentztransf.}}_{\text{Poincaré transf.}}$

Newtons lagar och inertialsystem

(i) Fria partiklar rör sig med konstant hastighet

(ii) $F = ma$ ← kräver absolut tid!

(iii) Varje kraft har en lika stor och motriktad motkraft

Referenssystem

För att kunna definiera storheter som hastighet, elektriskt fält o.s.v behöver vi introducera koordinater som vi mäter map.

Referenssystem = koordinatsystem

Stelt referenssystem

Ortogonala Cartesiska koord. (jfr stelkropp)

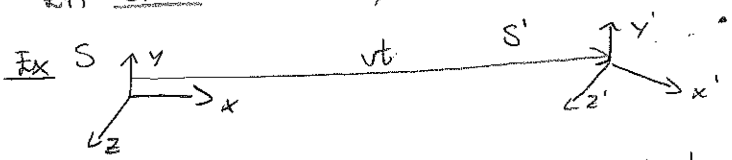
går inte alltid!

lokalt ⟹ allmän rel.teori (GR)

Inertialsystem

Def: Ett stelt referenssystem i vilket Newton (i) gäller.

Ex



Galileisk transformation

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \qquad (*)$$

OBS
Alla stela referenssystem i likformig relativ rörelse kan beskrivas på detta sätt.

- Koordinatsystemen $S: \{x, y, z, t\}$ och $S': \{x', y', z', t'\}$ sägs vara i standardkonfiguration. (rörelse i $\hat{x}$, annars oförändrat)
- För en händelse som inträffar vid $\{x, y, z, t\}$ och $\{x', y', z', t'\}$ relateras koordinaterna vid $(*)$, dvs via en (standard) Galileotransformation.
- Notera att $t' = t$ betyder att tiden är absolut, dvs händelsen inträffar vid samma tidpunkt i alla system.

Derivera $(*)$ map t

$$\Rightarrow u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z \quad \leftarrow \text{klassiska hastighetstransf.}$$

Ytterligare en derivering

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z$$

dvs vid likformig rörelse är accelerationen den samma i S och S'.

Tillbaka till Newtons lagar:

Från $a' = a$ ser vi att allt som behövs för att alla tre lagarna ska gälla i alla inertialsystem, dvs vara invarianta under Galileiska transf., är att vi kompleterar med två axiom

$$\text{(iv)} \quad \mathbb{F}' = \mathbb{F}$$
$$\text{(v)} \quad m' = m$$

<u>Ex</u>

$$S \qquad\qquad\qquad S'$$

$$\mathbb{F} = ma \quad \longrightarrow \quad \mathbb{F}' = m'a' \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{F} = ma$$

nya axiom

Derivering föregående sida

Att Newtons lagar gäller i <u>alla</u> IS kallas Newtons (eller Galileisk) relativitet.

Varför räcker det inte med Newtons mekanik?

Vi har just sett att Newtons lagar gäller i alla IS, men hur är det med övriga fysiklagar?

<u>Ex</u>

Ljus (elektromagnetism)

Vad färdas ljuset i? Etern ?!

Michelson & Morley: Mät hur jorden färdas genom etern.

Resultat: Ljuset gick lika fort i alla riktningar!

Hur förklarar man detta?

Nu kliver Einstein in:

Postulat 1) Alla IS är ekvivalenta för genomförandet av <u>alla</u> fysikaliska experiment.

2) Ljuset rör sig rätlinjigt med hastighet c i <u>varje</u> IS.

Detta kallas Einsteins <u>relativitetsprincip</u> (RP)

$\Longrightarrow$ det finns inget absolut rum.

Men postulat 2 är inte uppfyllt om vi relaterar IS med Galileiska transf.

$\Longrightarrow$ Relaterar istället olika IS med Lorentztransformationerna.

$\Longrightarrow$ Speciell relativitetsteori!

<u>Mål</u> Modifiera alla fysikens lagar så att de gäller i alla IS

SpecRel 27/10-11 Torsdag LV 1

Förra gången

- Inertialsystem   Stelt referenssystem / koordinatsystem i vilket NI gäller
- Newtons lagar <u>invarianta</u> under <u>Galileo</u>transformationer
  relativitet = symmetri'
- Ljushastigheten är den samma i alla IS
  ⇒ Lorentztransformationen (LT)

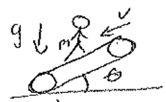
Dagens mål

- Relativistisk problemlösning
- Introducera längdkontraktion, tidsdilation och relativitet av samtidighet

Relativistisk problemlösning

- Utnyttja det faktum att vi kan välja IS!
  Ofta finns det ett IS i vilket problemet är lättare att lösa
  mer symmetri?
  färre okända

Ex



(fig 2.2)

Vilken effekt utvecklar mannen?

Mannens IS

kraft längs bandet: $F = mg \sin\theta$

$\Rightarrow P = F \cdot v = mgv \sin\theta$

tank för $\theta = 0$

Övre bandets IS

mannen rör sig relativt bandet.

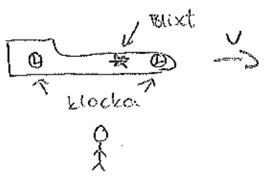
$$P = \frac{\text{Potentiell energi}}{\text{tidsenhet}} = mg \sin\theta \, v$$

∴ resultat oberoende av IS

Relativitet av samtidighet, tidsdialation och längdkontraktion

- Använd att ljuskastigheten är samma i alla IS

Ett <u>enkelt ex.</u>



- När planet passerar, och är mitt för dig, går en blixt av mitt i planet.
- För en person i planet når ljuset från blixten klockorna samtidigt. I valda enheter vid $t = 3$.

- För dig (dvs i ditt vilosystem) rör sig också ljuset med hastighet c, men nu rör sig även planet

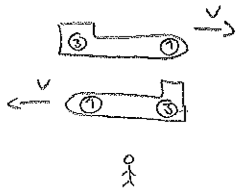
  ⇒ Ljuset når klockan bak i planet först (i ditt IS!)
  Vi vet att detta händer då klockan visar $t = 3$.

Men detta betyder att klockan fram i planet måste visa $t<3$,
$t=1$ (en. val av parameter)

∵ Händelser som inträffar vid samma tidpunkt i ett IS gör det inte i andra IS!

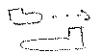
$\Rightarrow$ ingen absolut tid

Lägg till ett plan till

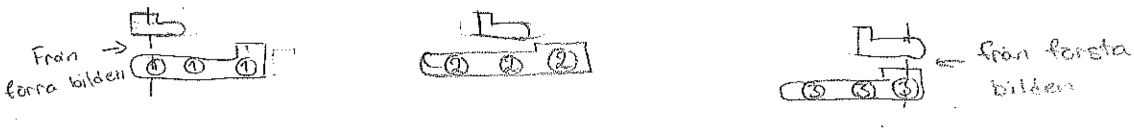


↖ tider följer av symmetrin

- Det nedre planet ser det övre att vara "inom" det nedre från $t=1$ till $t=3$!
  lika långa plan → en tidpunkt
  om ett plan är kortare → längre tid



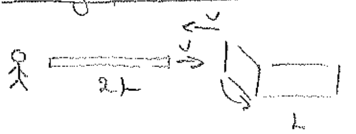
Hur ser vi detta?



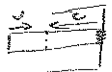
$\Rightarrow$ Det nedre planet uppfattar det undre planet som kortare!

$\Rightarrow$ Längdkontraktion

Garageparadoxen

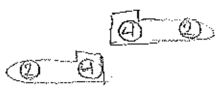


Ser ok ut ur garagets IS enl. ovan
Ser mycket konstigare ut i stavens IS
funkar men kräver mer tanke!



Informationen om träff rör sig bakåt med hast. i.e. c och v
Staven fortsätter framåt med hast. v tills "möts"

Till sist, studera när planens bakdelar passerar varandra



} relativa skillnaden mellan den främre och bakre klockan är två tidsenheter

- Tiden det tar för den övre bakre klockan att passera hela det undre planet är
  - 1 tidsenhet enl. det övre planets klocka
  - 3 — — — er — — undre — — —

∴ Det undre planet ser att det övre planets klocka går $1/3$ ggr så fort!

$\Rightarrow$ Tidsdilatation

IS är 1) Homogena (translationsinvariant) både i rum och tid
2) Isotropa (rotationsinvariant)

∴ Homogen : Likadant i varje punkt.
Isotropt : Likadant i varje riktning.

"medelsystem" lemma : Mellan två IS S och S', finns ett system S'' relativt vilket S och S' har lika stor, men motsatt riktad, hastighet.

$S \quad \underset{v}{S' \rightarrow} \quad \not\Rightarrow \quad \overset{v/2}{\leftarrow S} \quad S'' \quad \overset{v/2}{S' \rightarrow}$

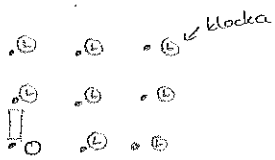
kan inte addera hastigheter med LT

Koordinater i inertialsystem (Behöver företa detta eftersom LT är en koord. transf.)

• Hur kan man (praktiskt) välja isotropa och homogena koordinater i ett IS?

- Välj en enhetslängd och en enhetstid.
- Sänd ut en signal, tex ljus, från origo för att synka klockorna.

↖ räkna ut avstånd från origo



⇒ standardkoordinater (SK)

Kan vi använda dessa koordinater även i andra IS? (räcker ett till alla?)

Nej   Isotropi ← längdkontraktion i den relativa r
enbart i rörelseriktningen

Enheter ← tidsdilatationen

⇒ För varje IS välj tillhörande SK!

Spec Rel 31/10 -11 Måndag LV 2

Förra gången

- Relativistisk problemlösning
- Flygplans exemplet
- IS är homogena och isotropa
- Medelsystemslemmat
- För varje IS välj tillhörande SK.

Dagens mål

- Härleda LT
- Egenskaper hos LT

Naturliga enheter $c = 1$, $G = 1$

$[c] = L/T$ (L ← längd, T ← tid)

$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$ (M ← massa)

$F = ma \Rightarrow [F] = MLT^{-2}$

$F \sim G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ $\quad [F] = [G] M^2 L^{-2}$

$\Big\} [G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

Härledning av LT

- Relateran standard koordinater i olika IS

$$S : (x, y, z, t) \longleftrightarrow S' : (x', y', z', t')$$

- LT måste vara linjär (dvs går att skriva som en matris verkande på koord.)

Bevis

Använd N1 och homogenitet (rum och tid)

C ← rör sig fritt

$$S: \; x_i = x_i(t) \qquad i = 1,2,3$$

$$\text{N1} \Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = \text{konst.} \qquad \text{fri rörelse = konst. hast.}$$

Låt τ vara C's egentid, dvs tiden klockan visar.

Homogenitet $\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{konst.}$ ← ändras ej i varken tid eller rum.

$$\Rightarrow \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \text{konst.} \qquad \mu = 1,2,3,4 \;;\; x_4 = t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = 0$$

I S' ger samma argument $\frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2} = 0$

$$\frac{dx'_\mu}{d\tau} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} \qquad \underbrace{\frac{d^2 x'_\mu}{d\tau^2}}_{=0} = \underbrace{\sum_{\nu,\sigma} \overset{\nearrow M}{\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}} \overset{\nearrow x}{\frac{dx_\sigma}{d\tau}} \overset{\nearrow x}{\frac{dx_\nu}{d\tau}}}_{= X} + \sum_\nu \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \underbrace{\frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2}}_{=0}$$

X måste vara noll för varje val av $\frac{dx_\sigma}{d\tau}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 0}$$

dvs transformationen är linjär.

$x^T M x = 0 \quad \forall x$

$$\Rightarrow \boxed{x_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu} x'_\nu + B_\mu} \quad (1)$$

$$\left[\Rightarrow \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} = \sum_{\nu,\sigma} A_{\mu\nu} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\sigma} \sim \delta^\nu_\sigma = A_{\mu\sigma}\right]$$

Detta medför att alla partiklar i vila i ett godt. IS S' rör sig med samma konstanta hastighet genom varje annat IS S.

Bevis

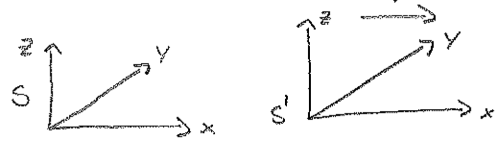
partikel i vila i S' $\Rightarrow$ x'_i = konst. $i = 1,2,3$

(1) $dx_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu} dx'_\nu = A_{\mu 4}\, dt'$ ← endast dx'_4 överlever

$$\Rightarrow \begin{cases} dt = A_{44}\, dt' \\ dx_i = A_{i4}\, dt' \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = \frac{A_{i4}}{A_{44}} = \text{konst.}$$

∴ Koordinatgittret i S' är i S ett stelt gitter vars rörelse bestäms helt av ett objekt i gittret.

Linjäritet + symmetri gör att vi alltid kan välja S och S' att vara i SK. vid $t=0$ överlappar origo

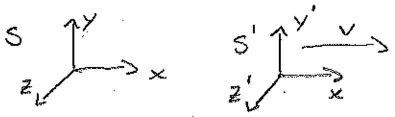


I fortsättningen låter vi därför alltid S och S' vara i SK.

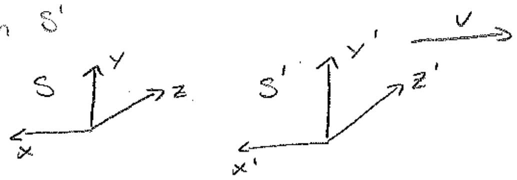
- Transformationen mellan varje par av IS i SK med samma relativa hastighet måste vara densamma ← RP.

(Enbart den relativa hastigheten mellan olika IS spelar roll.)

- Invertera x och z axlarna hos S och S'



$x \mapsto -x$
$z \mapsto -z$



∴ Har bytt S och S' !

Endast relativ hastighet relevant så om vi också byter primade och oprimade koord. måste det vara en symmetri hos LT.

x-z invertering $x \leftrightarrow -x'$, $y \leftrightarrow y'$, $z \leftrightarrow -z'$, $t \leftrightarrow t'$

Samma sak gäller för xy-invertering

konstanter som kan bero av v.

Linjäritet $\Rightarrow$ $y' = Ax + By + Cz + Dt + E$

Enligt valet i SK har vi att $y = 0 \Rightarrow y' = 0$

$$\Rightarrow A = C = D = E = 0 \quad \Rightarrow \boxed{y' = By}$$

xz-invertering $\quad y = By' = B^2 y \quad \Rightarrow B = \pm 1$

Men $v \to 0$ måste kontinuerligt leda till identitetstransf. $\Rightarrow B = 1 \Rightarrow \boxed{y' = y}$

På samma sätt fås $\boxed{z' = z}$

Nästa steg x: $\quad x' = \gamma x + Fy + Gz + Ht + J$

Från valet av SK följer att $x = vt \Rightarrow x' = 0$

$$0 = \gamma vt + Fy + Gz + Ht + J \quad \Rightarrow F = G = J = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \gamma vt + Ht \quad \Rightarrow \boxed{H = -\gamma v}$$

$$\Rightarrow x' = \gamma x - \gamma vt = \gamma(x - vt) \qquad (2)$$

xz-inversion $\quad -x = \gamma(-x' - vt') \Rightarrow x = \gamma(x' + vt') \quad (3)$

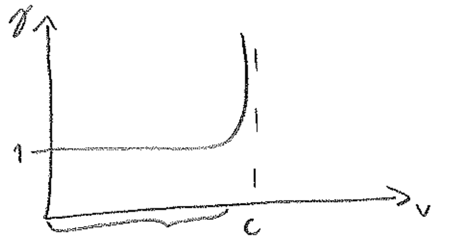
Newton

$$t = t' \Rightarrow \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt) \\ \hline x + x' = \gamma(x + x') \end{array} \Rightarrow \gamma = 1$$

Einstein

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad \Rightarrow \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - vt) \\ ct = \gamma(ct' + vt') \\ \hline c^2 tt' = tt'\gamma^2 (c - v)(c + v) \end{array} \Rightarrow \gamma = (\pm) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Kontinuerlig transf. för $v \to 0 \Rightarrow$ ta + lösningen



den klassiska regionen påverkas inte

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ kallas Laurentsfaktorn

Relationen mellan t och t' återstår.

Eliminera x' ur (2) och (3) $\quad \Rightarrow t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

$\therefore$ LT: $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z = z$, $t = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

v invertering: $\begin{cases} v \leftrightarrow -v \\ x_\mu \leftrightarrow x'_\mu \end{cases}$

SpecRel 3/11 - 11 Torsdag LV 2

Förra gången

- Naturliga enheter $c = 1$ $[c] = \frac{L}{T}$
- Härledning av LT $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$
- v-invertering $v \leftrightarrow -v$
  $x_\mu \leftrightarrow x'_\mu$

Kvadrerade avståndet

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$(\Delta s)^2 := c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$(\Delta s)^2 \begin{cases} < 0 & \text{rumslikt} \\ = 0 & \text{ljuslikt} \\ > 0 & \text{tidslikt} \end{cases}$$

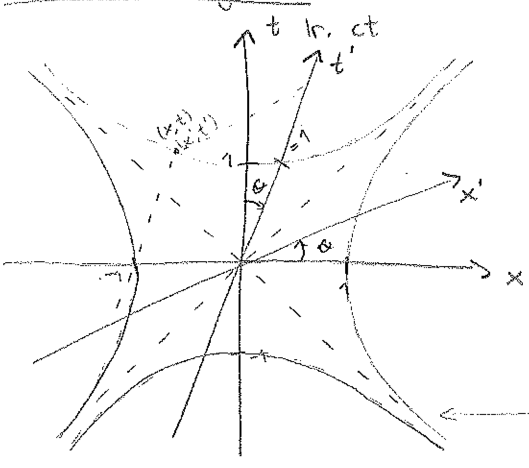
ljuslikt, tidslikt: information kan skickas

$\Delta s := \sqrt{(\Delta s)^2}$ avstånd (interval)

Dagens mål

- Minkowskidiagram
- $v \leq c$
- Relativistisk kinematik (kap 3)

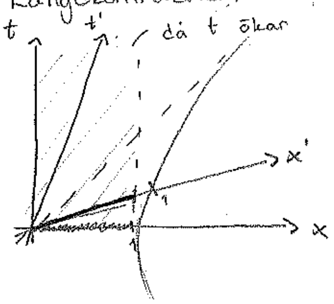
Minkowskidiagram $v \to c \Rightarrow \theta \to 45°$



- Lutning på världslinjer, $\frac{dx}{dt}$, är mått på hastigheten i aktuellt IS.
- Fixa punkter $\Rightarrow$ x-konstant
  samma tid $\Rightarrow$ t-konstant
- S' : $t' = \gamma(t - vx)$ t' = konstant $\Rightarrow t - vx$ = konstant $\to$ x' axel
  $x' = \gamma(x - vt)$ x' = konst. $\Rightarrow x - vt$ = konst $\to$ t' axeln
- Hur normerar vi S' axlarna?
  Kalibrerande hyperbeln : $\underbrace{t^2 - x^2 = \pm 1}_{\text{avståndet till origo} = 1}$

- Aktiv LT : (x,t) flyttar till en ny position $(\tilde{x}, \tilde{t})$ i S
- Passiv LT : (x,t) får en ny beteckning (x', t') dvs koordinaterna ändras.

Ex Längdkontraktion

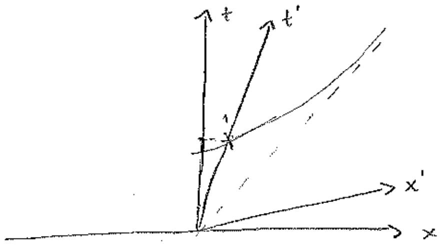


S: stav i vila, $L = 1$

Längd: avstånd mellan två pkt som ej skiljer sig i tiden i aktuellt IS

S': staven rör sig $\Rightarrow L < 1$

Tidsdilatation



Klocka fixerad i S' vid $x' = 0$

Hur mäter vi tiden i S?

När klockan som rör sig i S visar $T = 1$ har det gått mer än en tidsenhet i S.

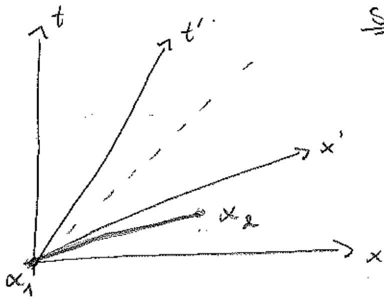
Kap 2.9 Rapiditet LÄS SJÄLV!

Den relativistiska hastighetsgränsen

- $\lim_{v \to c} \gamma = \infty$
- $v > c$ imaginärt
- $v > c$ leder till många paradoxer tex respekteras inte kausalitet (kan påverka det förflutna)

Axiom

Inga signaler med $v > c$ existerar.



S: α_1 signalen skickas, α_2 signalen mottas

S': α_2 signalen skickas, α_1 signalen mottas

Signalen skickas med $v > c$

i S sker α_1 före α_2

S' sker α_2 $(t<0)$ före α_1 $(t=0)$

[någonting som inte överför information kan ha $v > c$]

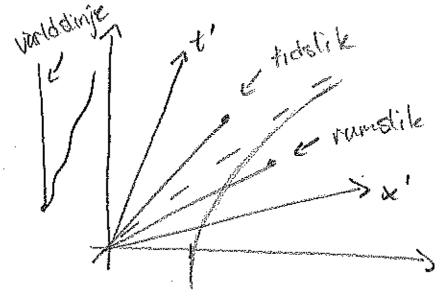
Spec Rel 6/11 - 11 Måndag LV 3

Förra gången

- Minkowskidiagram

  $v < c$ dvs

  $\theta < 45°$ från t-axel

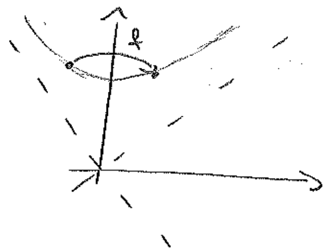


Aktiv transformation

LT $\quad x \to f_1(x,t)$

$\quad\quad t \to f_2(x,t)$

$x^2 - t^2 = C = f_1(x,t)^2 - f_2(x,t)^2$

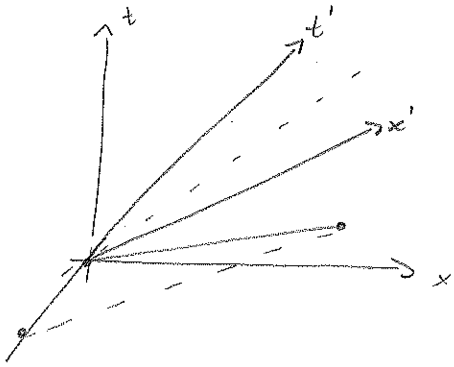


- Kalibrerande hyperbel

  $t^2 - x^2 = \pm 1 = (t')^2 - (x')^2$

- Relativistisk hastighetsgräns
  - $v > c \implies$ paradoxen
  - Axiom $v \leq c$

  $\implies$ Fasta kroppar och inkompressibla vätskor existerar inte



Dagens mål

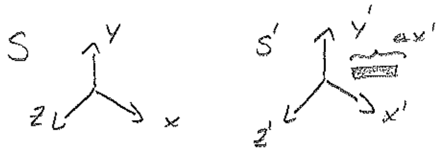
- Matematisk behandling av relativistisk kinematik, inkl längdkontraktion och tidsdilatation.
- Garage- och tvillingparadox
- Hastigheter och acceleration

Relativistisk kinematik

Världsbild (world-picture) - Händelser som en observatör ser vid en viss tidpunkt.

Världskarta (world-map) - Händelser som för en observatör inträffar vid en viss tidpunkt, $t = t_0$

Längdkontraktion



Studera en stav av längd $\Delta x'$ i vila i S'.

Hur lång är staven i S'?

För att mäta stavens längd måste vi mäta ändpunkternas position samtidig

behöver aldrig tänka på i vilosystem

LT $\implies \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ $\quad$ (2.11)

samtidigt: S $\implies \Delta t = 0 \implies \boxed{\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x'}$ $\quad , \gamma \geq 1$

Låt L_0 vara vilolängden/egenlängden hos ett objekt.

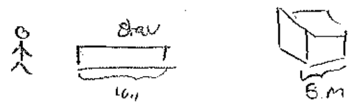
$$\begin{cases} L = \frac{L_0}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} L_0 \\ L \leq L_0 \end{cases}$$

← kontraktion sker i rörelseriktning!

Allmänt

Med "egen" måttet av en storhet menas måttet taget i objektets tillfälliga vilosystem.

En längdkontraktionsparadox

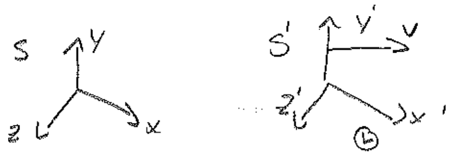


$v = 0.866 c \implies \gamma = 2$

Slutsats

Så länge fysiklagarna vi använder är konsistenta och Lorentzinvarianta måste ett resultat vi får i ett IS gälla i alla andra IS.
Men förklaringen kan skilja sig i de olika IS.

Tidsdilatation: Tvillingparadoxen



Studera ett tidsintervall $\Delta t'$ hos en klocka i vila i S'.
Vilket tidsintervall motsvarar detta i S?

Vet: klockan i vila i S' $\implies \Delta x' = 0$

$$LT \implies \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2}\right) \implies \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

Låt T_0 vara egentiden hos ett objekt

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$T \geq T_0$ ← För en extern observatör går tiden hos en klocka snabbast när den är i vila.

$v \to c \implies T \to \infty$ ∴ klockan stannar då $v \to c$

OBS Tidsdilatation är ingen illusion!

Ideal klocka: Opåverkad av acceleration.

Tvillingparadoxen

Tvilling B ger sig ut på en lång och snabb resa.
Vem är yngst när B kommer tillbaka ?

A's IS

B's klocka går långsammare $\Rightarrow$ B kommer vara yngre när han kommer tbx

B's IS

Symmetri (?) $\Rightarrow$ A kommer att vara yngre.

Lösning

Eftersom B accelererar finns ingen symmetri mellan A och B

$\Longrightarrow$ B yngre när han kommer tillbaka

3.6 Transformation av hastigheter

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$u' = (u_1', u_2', u_3') = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

$$LT \Rightarrow u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}, \quad u_2' = \frac{u_2}{\gamma\left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)}, \quad u_3' = \frac{u_3}{\gamma\left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)}$$

<u>OBS</u> kräver <u>ej</u> att u är konstant

V-invertering $\quad u_1 = \dfrac{u_1' + v}{1 + \frac{u_1' v}{c^2}}$ etc...

Detta är den relativistiska hastighetsadditionsformeln.

$$\Rightarrow dt^2 \underbrace{(c^2 - u^2)} = (dt')^2 (c^2 - (u')^2)$$

$$dt^2 \left(\frac{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{dt^2}\right)$$

$\therefore$ $u = v \mp u'$ där $v \leq c$ och $u' \leq c$ ger $u \leq c$

$\Rightarrow$ maxhastighet c.

Användbara formler

$$\frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(u)\left(1-\frac{u_1 v}{c^2}\right)$$

Ömsesidig hastighet vs relativ hastighet

Relativ hastighet : hastigheten som en partikel mäter hos en annan partikel
max c

Ömsesidig hastighet : $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$

Hastighetsskillnaden mellan två partiklar uppmätt av en observatör, Max 2c !

Transformation av acceleration

$$a_1' \overset{(*)}{=} \frac{a_1}{\gamma^3 D^3} \quad , \quad a_k' = \frac{a_k}{\gamma^2 D^2} + \frac{a_1 u_k v}{c^2 \gamma^2 D^3} \qquad k = 2,3 \qquad D = 1 - \frac{u_1 v}{c^2}$$

OBS För GT var $a = a'$, gäller inte för LT !

Ex konstant acceleration (se bok!)

Newton $\boxed{x = \frac{1}{2}\alpha t^2}$ parabolisk rörelse

Einstein $u_1 = v \iff S'$ tillfälligt vilosystem

$$\Rightarrow u_1' = 0$$

$$(*) \Rightarrow \alpha = \left[u_1 = v \Rightarrow D = \gamma^{-2}\right] = \underbrace{\frac{du}{dt}}_{=a_1}\gamma^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \left[d(\gamma v) = \gamma^3 dv \ (2.10)\right] = \frac{d}{dt}\left(\gamma(u)u\right)$$

Sätt $u = 0$ vid $t = 0$ $\Rightarrow \alpha t = \gamma(u)u$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}} \quad \text{hyperbolisk rörelse}$$

SpecRel $^{10}/_{11}$-11 Torsdag LV 3

Förra gången

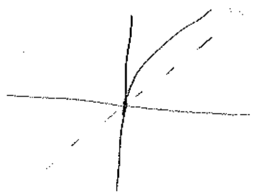
- Relativistisk kinematik
  - Världskarta
  - Längdkontraktion $L = \frac{1}{\gamma} L_0$
- Paradoxer
  - Garage
  - Tvilling
- Transformation av hast. och acc.
  $\frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2}$
- Ömsesidig och relativ hastigheten

Dagens mål

- Stel rörelse
- Räknal
- Relativistisk optik (kap 4)

Konstant acceleration Newton $x = \frac{1}{2}\alpha t^2$ parabolisk rörelse

Einstein $x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$ hyperbolisk rörelse



Ex $\alpha = \infty$ $x = \pm ct$ $\Rightarrow$ Egen acc. för en foton är ∞!

i fotonens "vilosystem"

Stel rörelse

Varje del av objektet krymper i rörelseriktn. proportionellt mot γ.

$\Rightarrow$ bakre delen av ett objekt måste accelerera fortare än den främre delen!

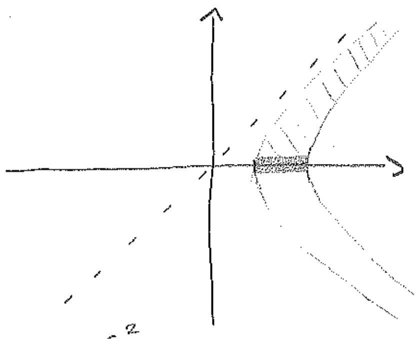
Kalibrerande hyperbeln beskriver rörelsen

Förklaring $c^2t^2 - x^2$ invariant

Aktiv LT för stavens ändpkten.

$\Rightarrow$ konst. avst. till origo

Varför olika egenacceleration?



$x^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$: $t = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{c^4}{\alpha^2} \Rightarrow x = \frac{c^2}{\alpha}$

Exempel

En raket rör sig med konstant hastighet bort från jorden. Den har en vilolängd på 60 m och två speglar fästa i vardera ända. En ljussignal utsänd från jorden reflekteras och retursignalerna återvänder med en tidsskillnad på 1.74 μs. Bestäm raketens hastighet.

S : jordens vilosystem

S' : raketens vilosystem

Två händelser, reflektion fram och bak på raketen.

I S vet vi : $\Delta t = \dfrac{1.74 \cdot 10^{-6}}{2}$ ← ljuset går fram och tillbaka

I S' vet vi : $\Delta x' = 60$ m

LT : (1) $\Delta t = \gamma(v)\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)$ ∵ vi behöver $\Delta t'$

Ljussignal : $\Delta t' = \dfrac{\Delta x'}{c}$

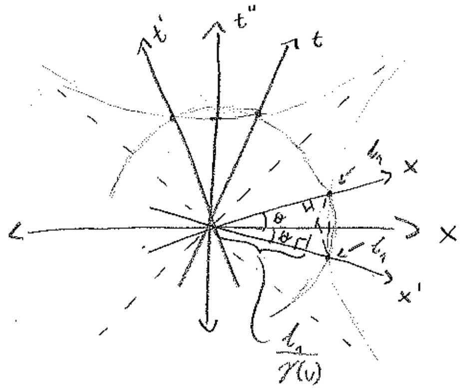
Sätt in i (1) och lös för v $\Longrightarrow \dfrac{v}{c} = \dfrac{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x'}\right)^2 - 1}{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x'}\right)^2 + 1} \approx 0.891$

$\Longrightarrow v = 0.891\,c$

II.7 (gamla boken)

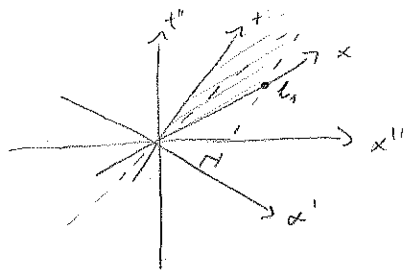
Vanligtvis illustreras S och S' asymmetriskt i Minkowskidiagram, men ibland är det bättre att införa "medelsystemet" S'' på de ortogonala axlarna.

Bevisa att $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{\gamma(v)}$ där v är hastigheten av S' relativt S.



Pga symmetri kan t, t', x, x' axlarna (men inte t'', x'') kalibreras med cirklar centrerade i origo.

$\cos(2\theta) = \dfrac{t_1\,\gamma^{-1}(v)}{t_1}$



"Projecerar" ner på x'-axeln

3.14 titta på till inlämningen!

En stav med längd L rör sig med hastighet u längs x-axeln i S.
Vad är dess längd L' i S'?

obs L är inte vilolängd utan längd vid hast. u.

$\Rightarrow L_0 = \gamma(u) L$

2 allmänna lösningar

1 2 – händelsen

$x_1 = ut \qquad x_2 = ut + L$

$\Rightarrow x_1' = \gamma(v)(ut - vt) \qquad x_2' = \gamma(v)(ut + L - vt)$

$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

Mät längd i S' $\Rightarrow$ mät vid $t' = 0 \Rightarrow t = \frac{vx}{c^2}$ (*)

$(*) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ut_1 \\ t_1 = \frac{vx_1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{uvx_1}{c^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = ut_2 + L \\ t_2 = \frac{vx_2}{c^2} \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{uvx_2}{c^2} + L \Rightarrow x_2' = \frac{L}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$

Beräkna $\Delta x'$

1 Använd $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$

$\Delta t^2 = \left(\frac{vx_2}{c^2}\right)^2 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) x_2^2$

$= -\gamma(v)^{-2} x_2^2 = -\frac{L}{\left(\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\right)^2}$

$\Rightarrow \Delta x' = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$

Metod 2

$x_1' = \gamma(v)(ut_1 - vt_1) = 0$

$x_2' = \gamma(v)((u - v)t_2 + L) = \ldots = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$

$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$

Alternativ lösning

$L_0 = L\gamma(v)$

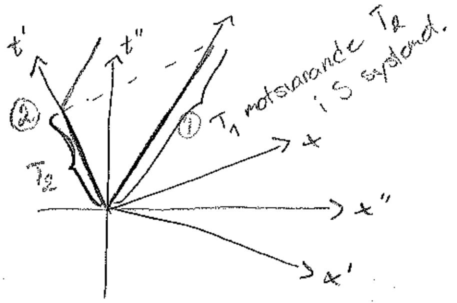
Beräkna u' : $u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$ $\Rightarrow$ Längden i S' är $L' = \frac{L_0}{\gamma(u')} = \frac{L\gamma(u)}{\gamma(u')}$

$\gamma(u') = \ldots = \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)\gamma(u)\gamma(v) \Rightarrow L' = \frac{L}{\gamma(v)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}$

SpecRel 15/11-11 Måndag LV 4

Förra gången

Hur kan vi förstå tvilling paradoxen geometriskt?



S: Tvilling 1 i vila

S': Tvilling 2 i vila

Tvilling 2 ska ta sig tillbaka till Tvilling 1. Efter en hastighetsförändring hos tvilling 2 är han i vila relativt tvilling 1.

OBS x, x', t och t' kan normeras mha cirklar

⟹ kan mäta längden direkt i diagrammet

Dagens mål

Relativistisk optik (kap 4)
- Optisk drift
- Dopplereffekten
- Aberration

Relativitet gjorde optiken enklare! Tidigare var man tvungen att ta hänsyn till hur man rörde sig i förhållande till etern, och fysiken var endast enkel i $\underbrace{\text{eterns}}_{\text{ljushastighet} = c}$ vilosystem.

OBS Här kan vi inte, i allmänhet, få klassiska svar genom att låta $c \to \infty$ eftersom de klassiska uttrycken innehåller c eftersom vi beskriver ljus.

Optisk drift (drag effect)

"Drar" en vätska i rörelse ljuset med sig?
(I luft dras ljudet med)

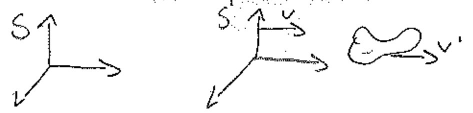
Låt ljusets hastighet i vätskan i vila vara u'.
Då vätskan rör sig med hastighet v fann man genom experiment att

$$u = u' + kv \qquad k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

↑ drift koeff. $(0 \le k \le 1)$

n är brytningsindex dvs $\frac{c}{u'} \Rightarrow n \ge 1$

SR : Det är bara hastighetsadditionsformeln !!



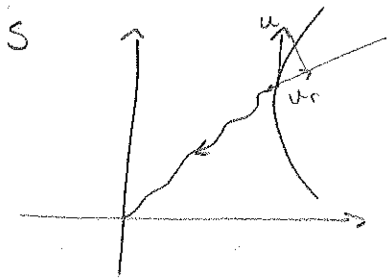
$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \approx (u'+v)\left(1-\frac{u'v}{c^2}\right) \approx u'+v\underbrace{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}_{\equiv k} = u'+kv + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Drift effekten är alltså "resultatet" av hastighetsadditionen och inte egentligen jämförbart med luftets dragning.

Dopplereffekten

- Frekvensen hos en annalkande ljus/ljud-källa är högre än frekvensen hos samma källa i vila.
- Källans IS : Observatören rör sig mot vågorna.

  Observatörens IS : Källan "jagar" vågorna.
- SR förenklade DE (etern bort), och la samtidigt till ett nytt element dvs tidsdilatation hos en källa i rörelse.



Egentiden mellan två pulser är $d\tau$ ← (klocka som åker med)
Tiden — — — — i S

$\Longrightarrow d\tau\,\gamma(u)$ av tidsdilatationen

∵ Nästa puls skickas ut senare $\gamma(u)\,d\tau$

längre bort $\gamma(u)\,d\tau\, u_r$

Detta medför att tiden mellan pulser som tas emot i origo blir

$$dt = \underbrace{d\tau\,\gamma(u)}_{\text{ren tids-dilatation}} + \underbrace{d\tau\,\gamma(u)\frac{u_r}{c}}_{\text{rörelsebiten, men även dilatation}}$$

OBS

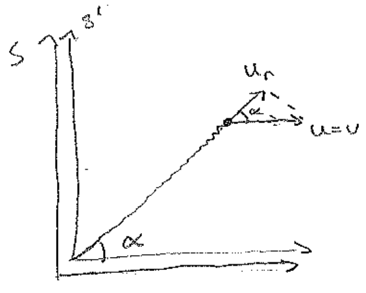
$dt \sim \frac{1}{\nu}$

$d\tau \sim \frac{1}{\nu_0}$ ← egenfrekvensen

tidsdilatationen

$$\Longrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1+u_r k}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \underbrace{1+\frac{u_r}{c}}_{\text{"rena" doppler}} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u^3}{c^3}\right)$$

Det är också användbart att ha uttryck som relaterar frekvenserna som två observatörer vid samma händelse mäter hos en inkommande signal.



Antag att källan är i vila i S'.
Detta är en möjlig (enkel!) källa som kan ha gett upphov till signalen vi tog emot, Då kan vi använda formeln ovan med $\nu_0 = \nu'$, $u = v$, $u_r = v\cos\alpha$.

$$\Longrightarrow \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1+\left(\frac{v}{c}\right)\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Hur kan vi använda denna formel?

Ex
Källa i vila i S genom vilken en observatör rör sig icke-uniformt.

$\Rightarrow$ Låt S' vara observatörens momentana IS och använd formeln ovan ($\nu = \nu_0$)

Viktig fråga

kan vi alltid gå till ett momentant IS vid accelererad rörelse?

Antag att både observatör och källa kan betraktas som ideala klockor

om detta inte är uppfyllt sätter det gränsen på hur stor acc. vi kan tillåta.

Under en period av vågen, $\Delta t = \frac{1}{\nu}$, hinner observatören röra sig, $\Delta x = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$

Detta måste vara försumbart jämfört med våglängden $\lambda = \frac{c}{\nu}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \ll 2c\nu}$ tex Gult ljus $\Rightarrow$ $\alpha \ll 3 \cdot 10^{26}\, g$ ← gravitation

sätter gränsen för när formlerna kommer att visa fel.

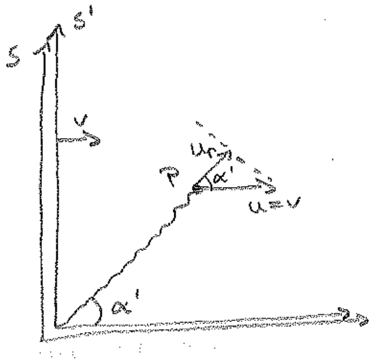
Aberration

- Vinkeln hos inkommande ljus beror på observatörens hastighet.

Ex Kör bil i snöfall.

Bradley 1728

Första exp. beviset på att jorden kretsar kring solen.



P(källan) i vila i S'

$$\begin{cases} u_1 = -c \cos\alpha \\ u_1' = -c \cos\alpha' \end{cases}$$

u_1 och u_1' är längs x-axeln

Använd hastighetsadditionsformlerna

$$\begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{\cos\alpha + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha} & \text{x-komp} \\[2ex] \sin\alpha' = \dfrac{\sin\alpha}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha\right)} & \text{y-komp} \end{cases}$$

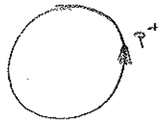
Mha $\tan\frac{\alpha'}{2} = \frac{\sin\alpha'}{1 + \cos\alpha'}$ $\Rightarrow$ $\tan\frac{\alpha'}{2} = \underbrace{\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2}}_{\substack{<1 \quad v>0 \\ >1 \quad v<0}} \tan\frac{\alpha}{2}$

Tan monoton $\Rightarrow$ $v > 0 \Rightarrow \alpha > \alpha'$
$v < 0 \Rightarrow \alpha < \alpha'$

Utgående strålar $\Rightarrow$ ersätt $c \to -c$

För $v > 0$ $\Rightarrow$ $\alpha < \alpha'$ $\Rightarrow$ strålkastareffekten

Ex synkrotonstrålning



SpecRel 17/11-11 Torsdag LV 4

Rumtid och 4-vektorer

- Tid och rum $\Rightarrow$ rumtid eller Minkowskirum

Motivationen

Lorentztransformationen blandar tid och rum
$\Rightarrow$ vi måste behandla tid och rum tillsammans om vi vill att fysiken ska vara densamma i alla IS

Skulle kunna vara mycket komplicerat men kvadrerade avståndet invariant

$$GT \Rightarrow (\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$LT \Rightarrow (\Delta s)^2 = \underbrace{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}_{\text{invariant under LT}}$$

$\Rightarrow$ Det finns en invariant metrik — ger rummet en struktur och definierar avstånd

3-dimensioner

$$\Delta r = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$$

$\Delta r_i \;, i = 1,2,3 \Rightarrow \Delta r^2 = \Delta r_i \Delta r_j \delta^{ij}$ — Einsteins summationskonvention

δ^{ij} ändras inte under rotation (och är koord. ober.)
dvs invariant under GT
δ^{ij} är en metrik som definierar avstånd!

4-dimensioner

$\Delta R = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t\}$ $\leftarrow$ prototypen för en 4-vektor

$\Delta R_\mu \;, \mu = 1,2,3,4 \Rightarrow (\Delta s)^2 \equiv (\Delta R)^2 = \Delta R_\mu \Delta R_\nu g^{\mu\nu}$ $\leftarrow$ $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$g^{\mu\nu}$ är invariant under LT!
$g^{\mu\nu}$ är Lorentzmetriken

Existensen av Lorentzmetriken innebär att tiden kan ses som en fjärde riktning, ortogonal mot x, y, z.

Men tecknet (signaturen) för tidsriktningen i metriken skiljer sig från rumsriktningarna. Detta är förklaringen till varför vi kan rita Minkowskidiagram som vi gjort.

Fysikalisk betydelse hos $(\Delta s)^2$

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \frac{(\Delta t)^2}{\underbrace{c^2 - \frac{(\Delta r)^2}{(\Delta t)^2}}_{v}}$$

Δ avser avståndet mellan två händelser, P & L

3 fall

- $(\Delta s)^2 = 0$ $\qquad \frac{(\Delta r)^2}{(\Delta t)^2} = c^2 - v^2$

  $\therefore$ P och L går att förbinda med en ljussignal!

- $(\Delta s)^2 > 0$ (tidslik separation)

  $\Rightarrow \frac{(\Delta r)^2}{(\Delta t)^2} < c^2$ i alla IS

  $\Rightarrow$ En klocka kan skickas med likformig hastighet mellan P och L. I dess vilosystem sker P och L i samma punkt (x, y, z) mätt i klockans vilosystem.

  $(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta \tau)^2$ $\qquad \Delta S = c\Delta\tau$

  egentid för klockan $\qquad \Delta S = \sqrt{(\Delta s)^2}$

  Genom att använda $\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(v)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\tau$ för $\Delta\tau = \int_P^L \left(dt^2 - \frac{dr^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{c}\int_P^L dS$, $v = \frac{dr}{dt}$

  $\Rightarrow dS = c\, d\tau$

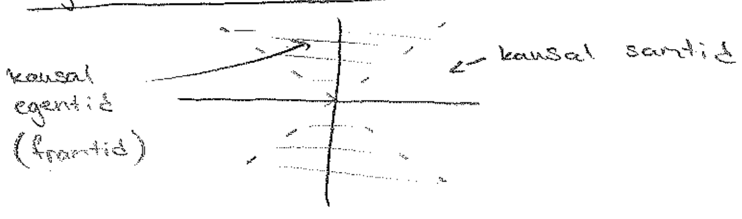
  reducerar till för likformig rörelse

- $(\Delta s) < 0$ $\Rightarrow \frac{(dr)^2}{(dt)^2} > c$ Det finns ett IS i vilket P och L inträffar samtidigt.

  I S' har vi att $(\Delta s)^2 = -(\Delta r')^2$

  minsta möjliga avstånd mellan P och L i ngt IS.

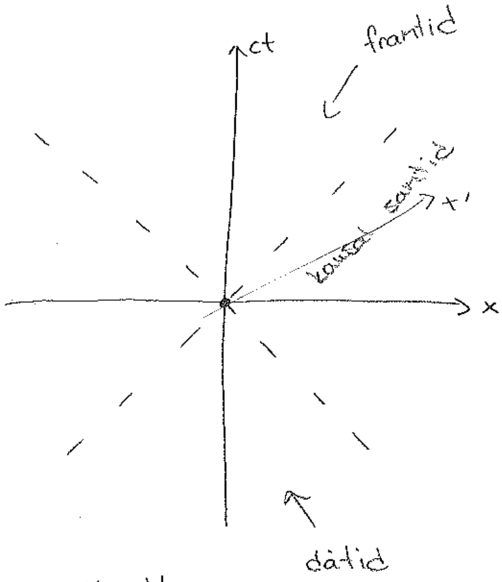
Ljuskoner och kausalitet



SpecRel 21/11-11 Måndag LV 5

Förra gången!

- Rumtid och 4-vektorer
- $\Delta \mathbb{R} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t\}$ prototyp
- $(\Delta s)^2 \equiv (\Delta \mathbb{R})^2 = \Delta R_\mu \Delta R_\nu g^{\mu\nu} \leftarrow$ invariant metrik
- Kausalitet



4-vektorer

$\Delta \mathbb{R} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t\}$ är prototypen för en 4-vektor

Def

En 4-vektor är ett objekt som transformerar som $\Delta \mathbb{R}$.

Ex
$\{\mathbb{x}, ct\}$ rum och tid
$\{\mathbb{p}, mc\}$ impuls och energi
$\{\mathbb{f}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\}$ kraft och effekt

Elektromagnetiska fält
$\Rightarrow$ tensorer (kap 7)

Vad är fördelen med 4-vektorn?

1) De transformeras på samma sätt
2) De transformerar enkelt $\leftarrow$ linjärt

Gruppteori : 4-vektorer är en representation till Lorentzgruppen.
vektor rep.

Vi säger att vi representerar en 4-vektor med 4 tal

$\mathbb{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ el. A_μ, $\mu = 1, \ldots, 4$

A_μ transformerar under LT genom att låta en transformationsmatris verka på indexet μ (som i 3d)

Tensorer = mer än ett index

Ex
$$B_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 & b_1 \\ e_3 & 0 & -e_1 & b_2 \\ -e_2 & e_1 & 0 & b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

En mycket viktig konsekvens av att använda 4-vektorer:

Om en 4-vektor ekvation (el. tensor ekv.) är uppfylld i ett IS är den uppfylld i alla IS.

Ex $\mathbb{F} = m_0 \mathbb{A}$ i S

$\Longrightarrow \mathbb{F}' = m_0 \mathbb{A}'$ i S'

Detta kallas forminvarians (el. kovarians). (= VL och HL tranf på s S)

Med forminvarians följer också att samma fysiklagar gäller i alla IS vilket RP kräver!

Egenskaper hos 4-vektorer

$$\mathbb{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix}$$

kvadraten

$$\mathbb{A}^2 = -A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 + A_4^2 = A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}$$

längd

$$A = |\mathbb{A}^2|^{1/2} \geq 0$$

skalärprodukt

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = -A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 + A_4 B_4 = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} \\ \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \mathbb{C} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}^2 \\ d(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = d\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot d\mathbb{B} \end{cases}$$

Ex Rindler 5.12

(i) Hitta fyra linjärt oberoende tidslika vektorer

(ii) - - - - - - - rumslika vektorer

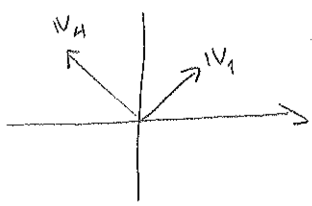
(iii) ljuslika vektorer

Lösning

(i) $\begin{cases} \mathbb{V}_1 = [0,0,0,1] \\ \mathbb{V}_2 = [1,0,0,2]/\sqrt{3} \\ \mathbb{V}_3 = [0,1,0,2]/\sqrt{3} \\ \mathbb{V}_4 = [0,0,1,2]/\sqrt{3} \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \mathbb{V}_1 = [1,0,0,0] \\ \mathbb{V}_2 = [2,1,0,0]/\sqrt{5} \\ \mathbb{V}_3 = [2,0,1,0]/\sqrt{5} \\ \mathbb{V}_4 = [2,0,0,1]/\sqrt{3} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \mathbb{V}_1 = [1,0,0,1] \\ \mathbb{V}_2 = [0,1,0,1] \\ \mathbb{V}_3 = [0,0,1,1] \\ \mathbb{V}_4 = [-1,0,0,1] \end{cases}$



Transformationsegenskaper hos 4-vektorer

- Oförändrade under translation i tid och rum
- De tre första komponenterna transformerar som en 3-vektor under rotationer
- Under standard LT

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \tfrac{v}{c}\Delta(ct)\right), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta(ct)' = \gamma\left(\Delta(ct) - \tfrac{v}{c}\Delta x\right)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \\ \Delta(ct') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & & & -\frac{\gamma v}{c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\frac{\gamma v}{c} & & & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta(ct) \end{bmatrix}$$

resten noll

OBS 1) $\mathbb{R} = (x,y,z,ct)$ är endast en 4-vektor under homogena LT, dvs vilka lämnar origo oförändrad

2) nollvektorn $(0,0,0,0)$ är en 4-vektor.

Låt $\mathbb{R} = (x,y,z,ct)$ vara koordinaterna för en partikel

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{R}}{d\tau} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{d(ct)}{d\tau}\right)$$

4-hastighet   egentid

$\mathbb{U}$ är även en tangentvektor till partikelns världslinje

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) \implies \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = u_1\gamma(u)$$

$$\implies \mathbb{U} = \gamma(u)\,(u_1, u_2, u_3, c)$$

Def

$$\mathbb{A} = \frac{d\mathbb{U}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbb{R}}{d\tau^2} \qquad \text{4-acceleration}$$

$$\mathbb{A} = \gamma\frac{d\mathbb{U}}{dt} = \gamma\frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{u}, \gamma c) = \gamma(\dot\gamma \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a}, \dot\gamma c) \qquad \text{där } \dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$$

Men i partikelns momentanavilosystem har vi $(u=0)$

$$\implies \mathbb{A} = (\mathbf{a}, 0) \qquad \text{eftersom } \dot\gamma \sim u \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\implies \mathbb{A} = 0 \iff \text{egenacc. är noll}$$

OBS $\mathbb{U}$ är aldrig noll!

Beräkna $\mathbb{U}^2$

$$\mathbb{U}^2 = \gamma^2(-u^2 + c^2) = c^2\,\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = c^2$$

Enklare: Gå till partikelns vilosystem! $u=0$

$$\implies \mathbb{U} = (0,0,0,c) \implies \mathbb{U}^2 = c^2$$

Eftersom $\mathbb{U}^2$ är invariant kan vi välja att räkna ut den i ett enkelt IS.

relativ hastighet

På samma sätt: $\mathbb{A}^2 = -\alpha^2$ samt $\mathbb{U}\cdot\mathbb{A} = 0$ och $\mathbb{U}\cdot\mathbb{V} = c^2\gamma(v)$

egenaccelerationen

[kan även ta $\frac{d}{d\tau}(\mathbb{U}^2 = 0)$]

$$\alpha^2 = -\mathbb{A}^2 = \gamma^4 a^2 + \gamma^6 \frac{(u\cdot a)^2}{c^2} = \gamma^6 a^2 - \gamma^6 \frac{(u \times a)^2}{c^2}$$ (se boken för härledning!) (5.29)

Förenklas då u och a är $\perp$ resp. $\parallel$.
$\uparrow$ cirkulär rörelse.

Standardformer för 4-vektorer

En 3-vektor (u_1, u_2, u_3) kan vi alltid <u>rotera</u> till $u(1,0,0)$. Detta kan vi också göra för 4-vektorer.

① Börja med (A_1, A_2, A_3, A_4)
② Rotera bort A_2 och A_3 $\Longrightarrow (\tilde{A}_1, 0, 0, A_4)$
③ Om $\tilde{A}_1 = A_4$ är $\mathbb{A}$ ljuslikt och standardformen är $A(1,0,0,1)$
④ Om $\mathbb{A}$ är tidslik kan vi med LT välja $(0,0,0,\pm A)$
$\uparrow$ kan inte ändra från bakåt till framåt i tiden

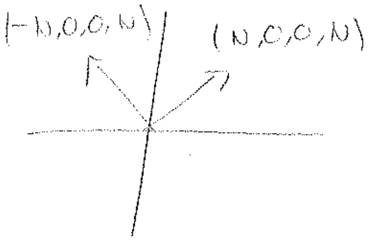
Om $\mathbb{A}$ är rumslik kan vi med LT välja $(A,0,0,0)$

Bra att använda i tex geometriska bevis.

<u>Ex</u> Två ljuslika vektorer $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ kan inte vara $\perp$ utan att också vara $\parallel$.

Välj $\mathbb{A} = (N,0,0,N)$ ortogonal med $\mathbb{B}$ ger $\mathbb{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = 0 \Longrightarrow B_1 = B_4$. Men $\mathbb{B}^2 = 0 = -\cancel{B_1^2} - B_2^2 - B_3^2 + \cancel{B_4^2}$ $\Longrightarrow B_2 = B_3 = 0$
$\Longrightarrow \mathbb{B} = B_1(1,0,0,1)$ $\square$



Ej ortogonala!

SpecRel 24/III -11 Torsdag LV 5

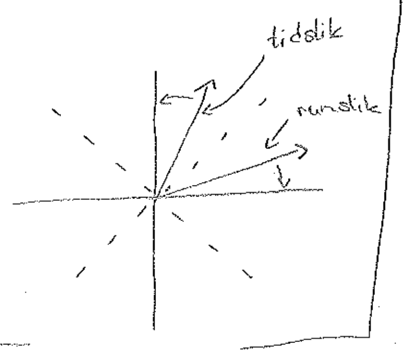
Förra gången

- $\mathbb{U}^2 = c^2$
- I vilosystemet $\mathbb{U} = (0, c)$, $\mathbb{A} = (\alpha, 0)$ $\Rightarrow \mathbb{U} \cdot \mathbb{A} = 0$

- Standardformer

  ljuslik : $(A, 0, 0, A)$
  tidslik : $(0, 0, 0, \pm A_4)$
  rumslik : $(A, 0, 0, 0)$

$$\mathbb{A} = (\underbrace{A_1, A_2, A_3}, A_4) \quad LT$$



Ex

Två ljuslika vektorer kan inte vara $\perp$ utan att även vara $\parallel$.

Dagens mål

- Räkna!
- Relativistisk mekanik (kap 6)
- $E = mc^2$

Teorem

1) Skalärprodukten av två framtidsriktade kausala vektorer $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ är ≥ 0, och noll endast om $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ är ljuslika och parallella.

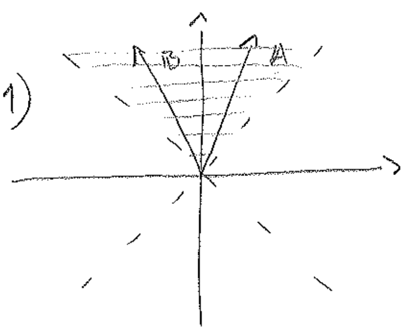
Bevis

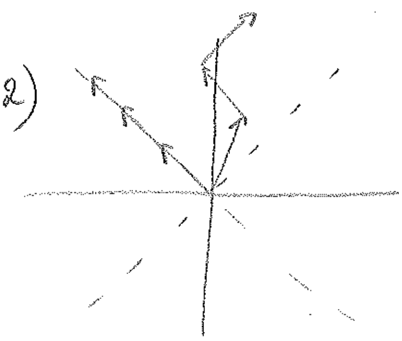
Försök själv! (Finns i Rindler s.102)

Framtidsriktad : $\mathbb{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, $A_4 > 0$

Kausal : tidslik el. ljuslik (dvs befinner sig i den framtida ljuskonen)

2) Summan av ett godt. antal framtidsriktade kausala vektorer $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \ldots$ är en framtidsriktad tidslik vektor, om inte alla vektorer är ljuslika och parallella då summan också är ljuslik.

1) 

2) 

Nollkomponentslemmat

Om en komponent av en 4-vektor är noll i alla IS är hela vektorn noll.

$\mathbb{A} = (0, A_2, A_3, A_4)$ rotation ger $A_2 = A_3 = 0$

LT ger $A_1 = A_4 = 0$

Plana vågor (5.7) i Rindler $\Longrightarrow$ läs själv

Ex Rindler 5.11

Bevisa : (i) Alla 4-vektorer ortogonala mot en given kausal vektor $\mathbb{A}$ är rumslika utom den kausala vektorn $\underbrace{\text{själv}}_{\text{och } -\mathbb{A}}$, om den är ljuslik.
(Alla vektorer nollskiljda)

Låt $\mathbb{A}$ vara tidslik $\Longrightarrow$ $\mathbb{A} = (0,0,0,A_4)$

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 0 \Longrightarrow A_4 B_4 = 0 \Longrightarrow B_4 = 0$ (rumslik: $\mathbb{B}^2 < 0$)

$\mathbb{B}^2 = -B_1^2 - B_2^2 - B_3^2 + \cancel{B_4^2} \Longrightarrow \mathbb{B}$ rumslik

Låt $\mathbb{A}$ vara ljuslik $\Longrightarrow$ $\mathbb{A} = (A_1, 0, 0, A_1)$

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 0 \Longrightarrow -A_1 B_1 + A_1 B_4 = A_1(B_4 - B_1) \Longrightarrow B_4 = B_1$

$\mathbb{B}^2 = -\cancel{B_1^2} - B_2^2 - B_3^2 + \cancel{B_4^2} \leq 0$ om B_2 el. $B_3 \neq 0 \Longrightarrow$ rumslik

Endast noll om $B_2 = B_3 = 0 \Longrightarrow \mathbb{A} \sim \mathbb{B}$ $\square$

(ii) Summan el. skillnaden mellan två $\perp$ rumslika 4-vektorer är rumslik.

$(\mathbb{A} \pm \mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 \pm \underbrace{\cancel{2\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}}_{=0} + \mathbb{B}^2 < 0 \Longrightarrow$ rumslik

(iii) Varje 4-vektor kan uttryckas som summan av två ljuslika vektorer.

Låt $\mathbb{A}$ vara ljuslik $\Longrightarrow$ $\mathbb{A} = (A_1, 0, 0, A_1)$

$\Longrightarrow$ Påståendet uppenbart sant tex $\mathbb{A} = \left(\frac{A_1}{2}, 0, 0, \frac{A_1}{2}\right)\left(\frac{A_1}{2}, 0, 0, \frac{A_1}{2}\right)$

Låt $\mathbb{A}$ vara tidslik $\xrightarrow{LT}$ $\mathbb{A} = (0,0,0,A_4)$

Vi kan nu skriva $\mathbb{A}$ som $\mathbb{A} = \left(\frac{A_4}{2}, 0, 0, \frac{A_4}{2}\right) + \left(-\frac{A_4}{2}, 0, 0, \frac{A_4}{2}\right)$

Låt $\mathbb{A}$ vara rumslik $\Longrightarrow$ $\mathbb{A} = (A_1, 0, 0, 0)$

$\mathbb{A} = \left(\frac{A_1}{2}, 0, 0, \frac{A_1}{2}\right) + \left(\frac{A_1}{2}, 0, 0, -\frac{A_1}{2}\right)$

Relativistisk mekanik (kap 6)

- Alla fysiklagar måste skrivas med 4-vektorer el. tensorer
  $\Rightarrow$ forminvarians
- Icke forminvarianta lagar måste korrigeras
  $\Rightarrow$ Newtons mekanik insågs ofullständig redan innan experiment visade detta. Före 1900-talet fanns bara ett tecken på att det var något ofullständigt med Newtons mekanik:

Merkurius perihelion: 43 bågsekunder / 100 år

43: en krona sedd på 5km håll

bågsekunder: $\frac{1}{3600}$ grad

- Nu $\gamma \sim 10^4$ Experiment (LHC: $\gamma \sim 7500$)
  $\gamma \sim 10^{11}$ Kosmisk strålning (protoner)

Än så länge har allting följt från LT

Nu behövs nya axiom!

Men för $v \ll c$ måste vi få tillbaka Newtons mekanik.

$\mathbb{P} = m_0 \mathbb{U}$ $\leftarrow$ $\mathbb{P}$ alltid tidslik, framtidsriktad (ljuslik för foton)

Axiom

$\mathbb{P}$ bevarad $\quad \sum_n \mathbb{P}_n^{\text{före}} = \sum_n \mathbb{P}_n^{\text{efter}}$ antalet partiklar kan ändras

I komponenter $\quad \mathbb{P} = m_0 \mathbb{U} = m_0 \gamma(u, c) =: (\mathbf{p}, mc) = (\mathbf{p}, \frac{E}{c})$

där $m = \gamma(u) m_0$ — naturligt att införa m, (relativistisk) massa

$\mathbf{p} = m\mathbf{u}$

relativistisk impuls

OBS

1) $m \to \infty$ då $v \to c$ Naturens sätt att undvika $v > c$!

2) 4-impulskonserveringen gäller komponentvis

$$\sum \mathbf{p}^{\text{före}} = \sum \mathbf{p}^{\text{efter}}, \quad \sum m^{\text{före}} = \sum m^{\text{efter}}$$

$E = mc^2$

Vad betyder konserveringen av relativistisk massa?
Inte många saker som är konserverade

$\Rightarrow$ kan det vara relaterat till energikonservering?

$$m = m_0 \gamma = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 + \underset{\text{prop. faktor}}{\frac{1}{c^2}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_0 u^2\right)}_{\text{kinetisk energi}} = \ldots$$

$\Rightarrow$ Hypotes $\boxed{E = mc^2}$

Motivering

Kinetisk energi "har massa"

$\Rightarrow \sum m$ är bevarad i tex kollisionsprocesser där kinetisk energi övergår i andra typer av energi, tex värme

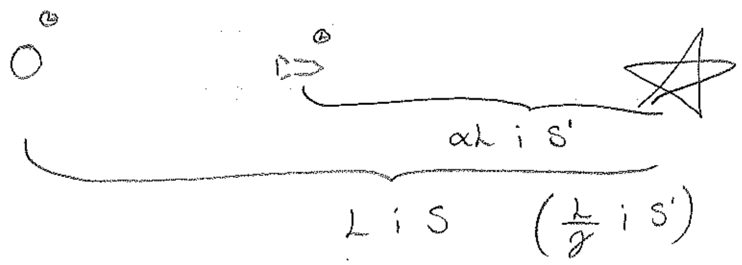
$\Rightarrow$ All energi måste ha massa!

Spec Rel 28/11 - 11 Måndag LV 6

Beräkna den observerade tidsskillnaden på klockorna.

S: jorden och stjärnans vilosystem

S': raketens vilosystem



Vad vet vi i S?

- $\Delta x = v\,\Delta t$ ← OBS origo i jorden!
- När man läser av en klocka på jorden från raketen kommer den visa $\frac{\Delta x}{c}$ mindre pga tiden det tagit för ljuset att nå raketen.

Vad vet vi i S'?

- jorden och stjärnan rör sig $\Rightarrow$ $\frac{L}{\gamma}$ i avstånd
- Avståndet raket - stjärnan är αL
  $\Rightarrow$ Avståndet jord - raket är $\frac{L}{\gamma} - \alpha L$ (i S')
- Vi har även $\Delta x' = 0$ och $\Delta t' = \frac{L}{v}\left(\frac{1}{\gamma} - \alpha\right)$
- Tidsdilatation ger $\Delta t' = \frac{1}{\gamma}\Delta t$

Nu har vi allt vi behöver.

Vilken klocka visar mest? Den i S'!

$$\Rightarrow \Delta T = \Delta t' - \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{c}\right) = \ldots = \frac{L}{v}\left(\frac{1}{\gamma} - \alpha\right)\left(1 - \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right)$$

Förra gången

- Relativistisk massa $\overset{?}{\sim} E$
  - argument
    - Finns inte många konserverade storheter
    - Symmetrier! : Transl. inv. i rummet $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ bevarad
      tiden $\Rightarrow$ E bevarad
  - utveckla $m = m_0 \gamma$ för att bestämma koefficienter $\Rightarrow$ $\boxed{E = mc^2}$
  - All energi har massa!

Relativistisk kinetisk energi

$$mc^2 = m_0 c^2 + T \qquad , T \sim \frac{m_0 v^2}{2} + \dots \qquad m_0 = \text{vilomassa}$$

Elastisk kollision $\Rightarrow$ T bevarad

Def: varje partikels vilomassa bevarad.

"Masslösa" partiklar (fotoner)

$m_0 = 0$

För att de ska ha $E \neq 0$, dvs $m \neq 0$ måste $v = c$!

$$m = \gamma(v)\, m_0$$

$\gamma(v) \to \infty$, m ändlig, $m_0 \to 0$

$\boxed{\text{Omvandlas all materia till energi : 1 g = Hiroshimabomben (20 kiloton)}}$

Potentiell energi

Ger inte partikeln massa!

- Elektrisk/gravitationell potentiell energi är energi som finns lagrad i det EM/gravitationella fältet.

- Nu viktigt var energin finns eftersom

  $E \sim m$, och massa kröker rummet. (Allmän relativitet)

$\mathbb{P}$-identiteter

$$\mathbb{P} = m_0 \mathbb{U} = (\mathbf{p}, mc) = (\mathbf{p}, E/c)$$

(1) $\Rightarrow \mathbb{P}^2 = m_0^2 c^2 = m^2c^2 - p^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$

$\mathbb{U}^2 = c^2 \longleftarrow$ $\mathbb{P}$ ljuslik endast för masslösa partiklar

(2) $\Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

$$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = c^4(m^2 - m_0^2)$$

(3) $\mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_2 = m_{01}E_2 = m_{02}E_1 = c^2 \gamma(v_{12})\, m_{01} m_{02}$ $\quad$ $E_1 = m_1 c^2$

m_{01} - partikel 1 i vila
m_{02} - 2

OBS En av partiklarna kan vara en foton, men inte båda eftersom vi går till ett vilosystem.

Elastisk kollision (vilomassan bevaras för varje partikel)

$\mathbb{P} + \mathbb{Q} = \mathbb{P}' + \mathbb{Q}'$ $\longleftarrow$ kvadrera!

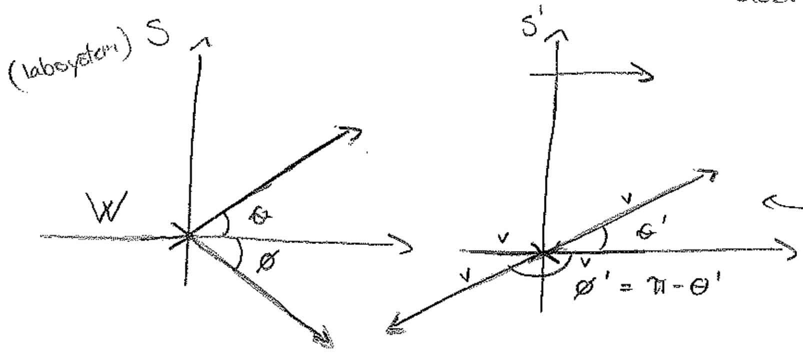
$$\Rightarrow \cancel{\mathbb{P}^2} + 2\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} + \cancel{\mathbb{Q}^2} = \cancel{(\mathbb{P}')^2} + 2\mathbb{P}'\cdot\mathbb{Q}' + \cancel{(\mathbb{Q}')^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} = \mathbb{P}'\cdot\mathbb{Q}'}$$

$\Rightarrow$ Den relativa hastigheten bevarad (även i Newton)

Relativistisk biljard

· Champion 1932
(stillastående elektroner bombarderas med snabba elektroner från radioaktivt sönderfall
$\Rightarrow$ Exp. bekräftelse av rel. mek.



$\longleftarrow$ Välj ett IS där problemet är enklare att lösa!

Newton : $\theta + \phi = 90°$ $\leftarrow$ biljard!

- Fokusera endast på partiklarnas riktningar.
- Partikel abberation (Uppg. 4.13)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha'}{\gamma(v)\left(\cos\alpha' + \frac{v}{u'}\right)}$$

u' partikelns fart

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(v)(\cos\theta' + 1)}, \quad \tan\phi = \frac{\sin\theta'}{\gamma(v)(-\cos\theta' + 1)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan\theta \, \tan\phi = \frac{1}{\gamma^2(v)} = \frac{2}{\gamma(w)+1}} \Longrightarrow \boxed{\theta + \phi \leq 90^\circ}$$

3.10 ii)

Noll-impuls-systemet

- Såg i förra exemplet att ett system i vilket $\sum \mathbb{p} = 0$ förenklar problemet
- Vi kan alltid* gå till ett system där $\sum \mathbb{p} = 0$

$$\bar{m} = \sum m \,, \quad \bar{\mathbb{p}} = \sum \mathbb{p} \,, \quad \bar{\mathbb{P}} = (\bar{\mathbb{p}}, \bar{m}c)$$

- $\bar{\mathbb{P}}$ är en 4-vektor (inte trivialt! Se Rindler s.117)
- $\bar{\mathbb{P}}$ tidslik och framtidsriktad

(om inte alla $\mathbb{P}_i$ är ∥ och ljuslika)*

Tröskelenergien

Ex $\quad p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ pion

$p \overset{v}{\bullet\!\rightarrow} \qquad \overset{\circ}{p}$ ← en proton i vila

Vilken är minsta möjliga energi hos den inkommande protonen för att kunna skapa π^0?

OBS Inte $Mc^2 + mc^2$ eftersom partiklarna efter kollisionen rör sig!

$\quad\;\; p \qquad \pi^0$

SpecRel 30/11 -11 Onsdag LV 6

Förra gången

- Pot. energi finns inte hos partiklar utan hos ett fält.
- Kinetisk energi $mc^2 = m_0 c^2 + T$ $(m = m_0 \gamma)$ $(T = \text{kinetisk energi})$
- Elastisk koll. $\Longleftrightarrow$ vilomassorna bevaras $\Longrightarrow$ T bevaras
- Masslösa partiklar $m_0 = 0$, $m \neq 0$

Tröskelenergier

Ex $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$

Vilken är den minsta möjliga energin hos den inkommande protonen för att kunna skapa π^0?

$p \longrightarrow \cdot p$

$$\underset{\text{kula}}{\mathbb{P}_K} + \underset{\text{mål}}{\mathbb{P}_M} = \sum_i{}' \mathbb{P}_i \xrightarrow{\text{kvadrera}} m_{0K}^2 + m_{0M}^2 + \frac{2}{c^2} m_{0M} \underset{\substack{\text{enda parametern}\\ \text{i vänsterledet}}}{E_K} = \sum_i{}' m_{0i}^2 + 2\sum_{(i<j)}{}' m_{0i} m_{0j} \gamma(v_{ij})$$

Högerledet minimeras för $\gamma(v_{ij}) = 1$ dvs för ingen relativ rörelse mellan slutprodukterna.

$$\boxed{E_k = \frac{c^2}{2\underset{\substack{\text{målet kan inte}\\ \text{vara en foton}}}{m_{0M}}} \left[\left(\sum{}' m_{0i} \right)^2 - \underset{\substack{\text{kulan kan vara}\\ \text{en foton}}}{m_{0K}^2} - m_{0M}^2 \right]}$$

Effektivitet

$$k = \frac{\text{viloenergin för den nya partikeln}}{T_{\text{kula}}}$$

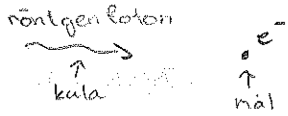
För processen ovan $\Longrightarrow$ $k = \dfrac{2}{4 + \frac{m}{M}} < 50\%$ (m: π^0, M: p)

Bättre att använda partiklar med motsatta hastigheter

$\Longrightarrow$ Ingen energi behöver slösas på kinetisk energi, tex LHC.

Comptoneffekten

Compton 1922



$\mathbb{P}_1$: partikel med vilomassa m_{01}

$\mathbb{P}_2$: foton med frekvens ν_2

Vill härleda en formel för hur våglängden hos fotonen ändras i stöten.

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_2 = h m_{01} \nu \qquad [E = h\nu] \qquad (1)$$

Om båda partiklarna är fotoner fås

$$\mathbb{P}_1 \cdot \mathbb{P}_2 = c^{-2} h^2 \nu_1 \nu_2 \, (1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

från de Broglies ekv. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vågvektor}}}{\mathbb{P} = h\mathbb{K}} = h\nu \left(\frac{\mathbf{n}}{w}, \frac{1}{c} \right)$

enhetsvektor

vågens hastighet

$m \propto \mathbb{P}_2$

$uw = c^2$

partikelns hastighet

(Rindler 6.8 läs själv!)

$$\mathbb{P} + \mathbb{Q} = \mathbb{P}' + \mathbb{Q}' \qquad \begin{cases} \mathbb{P} - \text{foton} \\ \mathbb{Q} - \text{elektron} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\mathbb{P} + \mathbb{Q} - \mathbb{P}')^2 = (\mathbb{Q}')^2$$

bli av med elektronen efter kollision!

$$\Longrightarrow \underbrace{\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}'}_{(2)} = \underbrace{\mathbb{Q} \cdot (\mathbb{P} - \mathbb{P}')}_{(1)} \Longrightarrow \boxed{\lambda' - \lambda = 2\ell \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

där $\ell = \frac{h}{cm}$

comptonvåglängden (ökning av λ vid $\theta = 90^\circ$)

Sprida fotoner mot stillastående e^- kallas Comptonspridning.
Invers Comptonspridning är då en snabb (relativistisk) elektron, eller annan laddad partikel, kolliderar med en foton.

$\Longrightarrow$ viktig källa till intergalaktiska röntgenstrålar

Ex

En foton med 4-impulsen $\mathbb{P}$ observeras av två observatörer med 4-hastigheter $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$. Härled ett uttryck för kvoten mellan de observerade frekvenserna uttryckt i 4-vektorerna ovan.

Lösning

I vilosystem för observatör 1 har vi

$$\mathbb{P}_{(1)} = (1, 0, 0, 1) \frac{h\nu_1}{c}$$

medan observatörens hastighet är

$$\mathbb{U}_{(1)} = (0, 0, 0, c)$$

Nu har vi att $\mathbb{U}_{(1)} \cdot \mathbb{P}_{(1)} = h\nu_1$ vilket är invariant.

På samma sätt fås $\mathbb{U}_{(2)} \cdot \mathbb{P}_{(2)} = h\nu_2$

i det ursprungliga systemet

Kvoten blir nu $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mathbb{U}_{(1)} \cdot \mathbb{P}_{(1)}}{\mathbb{U}_{(2)} \cdot \mathbb{P}_{(2)}} = \frac{\mathbb{U}_{(1)} \cdot \mathbb{P}}{\mathbb{U}_{(2)} \cdot \mathbb{P}}$

skalärprodukterna uträknade i resp. observatörs vilosystem

4-kraft och 3-kraft

- $\mathbb{P}$ är mer fundamental än $\mathbb{A}$

tex bevarad   4-acc.

$$\Longrightarrow \mathbb{F} = \frac{d}{d\tau}\mathbb{P} = \frac{d}{d\tau}(m_0 \mathbb{U}) = m_0 \mathbb{A} + \underline{\frac{dm_0}{d\tau}\mathbb{U}} \qquad (1)$$

OBS Inte samma som $\mathbb{F} = m_0 \mathbb{A}$!

använd $\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)$

Vi har också $\mathbb{F} = \frac{d}{d\tau}\mathbb{P} = \gamma(u)\frac{d}{dt}(\mathbf{p}, m_0) = \gamma(u)\left(\mathbf{f}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right) \qquad (2)$

där $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u})$

reducerar till den Newtonska kraften för långsam rörelse.

OBS Effekten, $\frac{dE}{dt}$, är tidskomponenten i $\mathbb{F}$.

$$\mathbb{F} \cdot \mathbb{U} = \underbrace{c^2 \frac{dm_0}{d\tau}}_{(1)} = \gamma^2(u)\left(\frac{dE}{dt} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\right) \qquad (3)$$

$\begin{cases} \mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = 0 \\ \mathbb{U}^2 = c^2 \end{cases}$

$\therefore$ $\mathbb{F} \cdot \mathbb{U}$ är takten i vilken partikelns interna energi ändras. — m_0

Vilomassabevarande kraft

$$\mathbb{F} \cdot \mathbb{U} = 0 \iff \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \frac{dE}{dt} \iff \mathbb{F} = \gamma(u)\left(\mathbf{f}, \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c}\right)$$

I kollisioner mellan partiklar med inre struktur kan m_0 ändras.

Transformation av $\mathbb{F}$

$\mathbb{F} = \gamma(u)\left(\mathbf{f}, \frac{1}{c}\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{=G}\right)$ ← samma form som för $\mathbb{U}$!

$$f_1' = \frac{f_1 - \frac{vG}{c^2}}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}, \quad f_i' = \frac{f_i}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_1 v}{c^2}\right)} \quad i = 2,3$$

$$G' = \frac{G - v f_1}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}$$

beror på $\mathbb{U}$

OBS $\mathbf{f}$ inte invariant som i Newtons teori (samma som för $\mathbf{a}$)

m_0-bevarande krafter

$$\mathbb{f} = \frac{d(m\mathbb{u})}{dt} = m\mathbb{a} + \frac{dm}{dt}\mathbb{u} \quad \underset{\mathbb{F}\cdot\mathbb{U}=0}{\Longrightarrow} \quad m\mathbb{a} = \mathbb{f} - \frac{\mathbb{f}\cdot\mathbb{u}}{c^2}\mathbb{u}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{a}$ ligger i planet som spänns av $\mathbb{f}$ och $\mathbb{u}$, men är inte $\parallel$ med $\mathbb{f}$ förutom då $\mathbb{u} = 0$, eller då $\mathbb{f} \perp \mathbb{u}$ eller $\mathbb{f} \parallel \mathbb{u}$

Dela upp $\mathbb{f} = \mathbb{f}_\parallel + \mathbb{f}_\perp$ map $\mathbb{u}$

$$\Rightarrow \gamma m_0 (\mathbb{a}_\parallel + \mathbb{a}_\perp) = \mathbb{f}_\parallel + \mathbb{f}_\perp - \frac{u^2}{c^2}\mathbb{f}_\parallel \qquad \text{eftersom } f_\parallel u\,\mathbb{u} = \mathbb{f}_\parallel u^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^3 m_0 \mathbb{a}_\parallel = \mathbb{f}_\parallel \\ \gamma m_0 \mathbb{a}_\perp = \mathbb{f}_\perp \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{longitudinell massa} & m_\parallel = \gamma^3 m_0 \\ \text{transversell massa} & m_\perp = \gamma m_0 \quad ! \end{array}$$

Spec Rel 5/12-11 Måndag LV 7

Förra gången

- 4- och 3-kraft , $\mathbb{F} = \frac{d}{d\tau}\mathbb{P} = \ldots = m_0\mathbb{A} + \frac{dm_0}{d\tau}\mathbb{U}$

$\mathbb{F}\cdot\mathbb{U} = 0$ vilomassebevarande $\begin{cases} \mathbb{U}\cdot\mathbb{A} = 0 \\ \mathbb{U}^2 = c^2 \end{cases}$

- $\mathbf{f}$ och $\mathbf{a}$ inte invarianta som i Newtons teori!
- Dela upp $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\parallel} + \mathbf{f}_{\perp}$ map $\mathbf{u}$

$\Rightarrow \begin{cases} m_{\parallel} = \gamma^3 m_0 & \text{long. massa} \\ m_{\perp} = \gamma m_0 & \text{trans. massa} \end{cases}$

Tensorer (kap 7)

- Finns i alla dimensioner $\Rightarrow$ N-vektorer   Vi har $N = 3+1 = 4$
- Einsteins summationskonv. : upprepade index summeras.

Ex $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \underbrace{A_\mu B^\mu}_{} = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu}$ $\mu = 1,\ldots,4$, $i = 1,\ldots,3$ $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

OBS! Ett index uppe och ett index nere!

$\Rightarrow B_\nu g^{\mu\nu} := B^\mu$

$W^\mu = (\mathbf{w}, W^4) \Rightarrow W_\mu = (-\mathbf{w}, W^4)$

Nu viktigt om en 4-vektor har index uppe eller nere!

Upprepade index (summerade) = kontraherade index

Olika typer av tensorer

1) Kontravarianta tensorer = index uppe

Typexempel : Koordinatdifferentiallen dx^μ

Hur transformeras dx^μ? Kedjeregeln : $d(x')^\mu = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$

$\Rightarrow$ Alla kontravarianta tensorer transformerar på detta sätt

Ex $\Delta(x')^\mu = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu}\Delta x^\nu$

$$A'^{\mu_1,\ldots,\mu_n} = A^{\nu_1,\ldots,\nu_n}\left(\frac{\partial (x')^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial (x')^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}}\right)$$

2) Kovarianta tensorer = index nere

Typexempel: Gradienten $\phi_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi$ → komma notation!

Transformation: $\frac{\partial \phi}{\partial (x')^\mu} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial (x')^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\phi$

inversen av transf. för kontravarianta tensorer.

Alla kovarianta tensorer transformeras på detta sätt

$$A'_{\mu_1 \dots \mu_n} = A_{\nu_1,\dots,\nu_n}\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial (x')^{\mu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial (x')^{\mu_n}}\right)}_{n \text{ st}}$$

3) Mixade tensorer = index både uppe och nere.

Typexempel: δ_μ^ν Kronecker delta ($\nu = \mu \Rightarrow \delta = 1$ annars $\delta = 0$)

$$\delta'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\rho}_{\sigma}\left(\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\rho}\right)\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial (x')^\nu}\right) = [\sigma \neq \rho \Rightarrow \delta = 0] = \left(\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\rho}\right)\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial (x')^\nu}\right) =$$

$$= [\text{kedjeregeln}] = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial (x')^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Invariant!

Hur förstår vi det?

$\delta_\mu^\nu = g^{\nu\rho} g_{\rho\mu}$ och metriken är invariant!

Allmänt

$$A'^{\mu_1,\dots,\mu_n}_{\nu_1,\dots,\nu_n} = A^{\rho_1,\dots,\rho_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}\underbrace{\left(\frac{\partial (x')^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial (x')^{\mu_n}}{\partial x^{\rho_n}}\right)}_{n \text{ st}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial (x')^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial (x')^{\nu_n}}\right)}_{m \text{ st}}$$

gånger

Tensor av typ (n, m)

index uppe index nere

|| $\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu}$ och $\frac{\partial x^\mu}{\partial (x')^\nu}$ som matriser

$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}tc\right)$

$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$

$x = \gamma\left(x' + \frac{v}{c}ct'\right)$

$ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right)$

rad

$$\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & & & -\gamma\frac{v}{c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\gamma\frac{v}{c} & & & \gamma \end{bmatrix} = M \quad \text{och} \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial (x')^\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & & & +\gamma\frac{v}{c} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ +\gamma\frac{v}{c} & & & \gamma \end{bmatrix} = \tilde{M}$$

kolonn

$M\tilde{M} = \tilde{M}M = \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{M} = M^{-1}$

Detta förklarar varför t ex $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = A_\mu B^\mu$ är invariant

$$A_\mu B^\mu \longrightarrow A'_\mu B'^\mu \underset{\text{matrisform}}{=} A \underbrace{M^{-1} M}_{\mathbb{1}} B = A_\mu B^\mu$$

På samma sätt fås att alla uttryck utan <u>fria index</u> är invarianta.
(ty LT slår bara på okontraherade index)

Terminologi

Tensor : $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ kan vara en godtycklig icke-singulär diffrentierbar funktion $\Longrightarrow$ Allmän rel. teori

Lorentz el. 4-tensorer : x'^μ och x^μ relaterade genom LT $\Longrightarrow$ <u>SR</u>

$\nwarrow$ blir enklare för att $\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu}$ konstanta

<u>Viktigt</u> Om två tensorer av <u>samma typ</u> är lika i ett IS är de lika i alla IS.

<u>Ex</u> Tensor ekv.

Detta <u>betyder</u> att en tensor ekv. alltid uttrycker fysikaliska fakta som är oberoende av vilket IS man valt.

Tensor algebra (el. hur konstruerar vi nya tensorer)

- Summa $\quad C^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} = A^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} + B^{\mu\ldots}_{\nu\ldots}$ $\longleftarrow$ tensorer av samma typ! kan adderas.
- Yttre produkt $\quad C^{\mu\nu}_{\varsigma\sigma\tau} = A^\mu_\varsigma \; B^\nu_{\sigma\tau}$
- Kontraktion $\quad B^\mu_{\nu\varsigma} = A^{\mu\sigma}_{\nu\varsigma\sigma}$
- Inre produkt = yttre produkt + kontraktion
  $\quad A\cdot B \qquad A_\mu B_\nu \qquad A_\mu B^\mu$
- Indexpermutationer

n×n-matris

<u>Ex</u>

	frihetsgrader
$A^{(S)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) \quad (-A_\mu{}^\mu)$ ← symmetrisk	$\frac{n(n+1)}{2} - 1$
$A^{(A)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$ ← antisymmetrisk	$\frac{n(n-1)}{2}$
$A = A_\mu{}^\mu$ $\longleftarrow$ spåret	1
	$= n^2$

Derivering av tensorer

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(A^{\nu_1\dots\nu_n}{}_{\delta_1\dots\delta_m}\right) = A^{\nu_1,\dots,\nu_n}{}_{\delta_1,\dots,\delta_m,\mu}$$

Transformation

$$\frac{\partial}{\partial(x')^{\mu}}\left(A'^{\nu_1\dots\nu_r}{}_{\delta_1\dots\delta_m}\right) = \left(\frac{\partial x^{\tau}}{\partial(x')^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\right) A^{\sigma_1,\dots,\sigma_n}{}_{\kappa_1,\dots,\kappa_m}\left(\frac{\partial(x')^{\nu_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial(x')^{\nu_n}}{\partial x^{\sigma_n}}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\kappa_1}}{\partial(x')^{\delta_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\kappa_m}}{\partial(x')^{\delta_m}}\right)}_{\text{konstanta}}$$

OBS $\frac{\partial x'}{\partial x}$ konstant (annars kovariant derivata)

På samma sätt fås att $\frac{d}{d\tau}A^{\mu_1,\dots,\mu_n}{}_{\nu_1,\dots,\nu_m}$ är en tensor av typ (n,m)

Derivatan kommuterar med höjning och sänkning av index

Ex $A^{\mu}{}_{,\sigma} = (A_{\nu,\sigma})g^{\nu\mu} = (A_{\nu}g^{\nu\mu})_{,\sigma}$ eftersom $g^{\mu\nu}$ konstant

SpecRel 8/12 -11 Torsdag LV 7

Förra gången

- 4-tensorer - tre typer

$$A'_{\mu}{}^{\nu} = A_{\varrho}{}^{\sigma}\left(\frac{\partial(x')^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial x^{\varrho}}{\partial(x')^{\mu}}\right)$$

kontravarianta dx^{μ}

kovarianta $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$

mixade δ^{μ}_{ν} ← invariant!

- Höja och sänka index med $g^{\mu\nu}$

A_{μ} och $A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$ betraktas som samma objekt uttryckt på olika sätt

- Tensorer

> Inför muntan:
> Studieguiden
> Inlämningsuppg.
> (inga långa uträkningar)
> förståelse, definitioner, tensorer

Dagens mål

- Maxwells ekv. i tensorform
- 4-potentialen

Maxwells ekv.

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbb{e} = 4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbb{b} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbb{j}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbb{b} = 0 \qquad \nabla\times\mathbb{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{b}}{\partial t}}$$

inga magnetiska monopoler!

Enheter: Gaussiska/cgs (cm-g-s)

$\Rightarrow \mathbb{f} = q\left(\mathbb{e} + \frac{\mathbb{u}\times\mathbb{b}}{c}\right)$ Lorentz 3-kraft

invariant!

- Första raden kopplar fältet till källor
- Andra raden ger existensen av en potential
- Linjära ekv $\Longrightarrow$ superponera lösningar
- Lorentz kraften följer <u>inte</u> från Maxwells ekv.

Lorentzkraften är den <u>enklaste</u> tänkbara 4-kraften.

- Vi har tidigare sett att 4-kraften måste bero på hastigheten

$$\mathbb{F} = \gamma(u)\left(\mathbb{f}, \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)$$

- Enklaste fallet $F_\mu = \frac{q}{c} E_{\mu\nu} U^\nu$ (*)

kontraherade index ⟹ ett uppe, ett nere

linjärt beroende

EM-fälttensor

- Kräv att F_μ är m_0-bevarande

$$F_\mu \cdot U^\mu = 0 \implies E_{\mu\nu} \underbrace{U^\mu U^\nu}_{\text{symmetrisk i } \mu \leftrightarrow \nu} = 0 \quad \forall\, U^\mu \implies E_{\mu\nu} \text{ är antisymmetrisk}$$

dvs $E_{\mu\nu} = -E_{\nu\mu}$

$$\underline{E_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} = + E_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = - E_{\nu\mu} U^\nu U^\mu = \underline{- E_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} = 0$$

döper om indexen

- Vi vet att $E_{\mu\nu}$ på något sätt ska konstrueras av $\mathbb{e}$ och $\mathbb{b}$

$$E_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 & -e_1 \\ b_3 & 0 & -b_1 & -e_2 \\ -b_2 & b_1 & 0 & -e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad E_{ij} \rightarrow \underline{\varepsilon_i{}^{jk} E_{jk}} \sim b_i$$

- En antisymmetrisk tensor med två index innehåller 2 3-vektorer

$$\mu = \{i, 4\} \qquad E_{\mu\nu} : \{E_{ij}, E_{i4}, \cancel{E_{44}}\}. \qquad \text{tex } E_{i4}$$

- Om komponenterna placeras som ovan blir (*) exakt Lorentzkraften.

<u>Maxwells ekv. i tensorform</u>

- Betrakta en kontinuerlig fördelning av elektriska källor som har en <u>unik</u> 3-hastighet u vid varje händelse. pkt. i rummet

Behöver inte vara fallet, tex en ledare där jonen står stilla medan e^- rör sig.

- I lab-systemet $\rho = \rho_0 \gamma(u)$ ← pga längdkontraktion

- Definiera 3-strömtäthet $\mathbb{j} = \rho u$

Uppfyller kontinuitetsekv. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{j} = 0$

• 4-strömtätheten $J^\mu = (j, c\varrho)$ — 4e komponenten i U^μ

$$\Rightarrow \boxed{J^\mu{}_{,\mu} = 0}$$ kont. ekv.

Vi kan nu "gissa" oss fram till Maxwells ekv.

$$\begin{cases} E^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu & (1) \\ E_{\mu\nu,\sigma} + E_{\nu\sigma,\mu} + E_{\sigma\mu,\nu} = 0 \iff E_{\mu\nu,\sigma}\, \varepsilon^{\mu\nu\sigma\varrho} = 0 & (2) \end{cases}$$

(kontrollera själv!)

OBS 1) $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \to (1) \Rightarrow \underbrace{E^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}}_{=0} = 4\pi J^\nu{}_{,\nu} \Rightarrow \boxed{J^\nu{}_{,\nu} = 0}$

antisym. sym.

dvs kontinuitetsekv. följer direkt

4-potentialen

Något som drastiskt förenklar analysen av Maxwells ekv. är att de kan uttryckas i termer av en potential.

$$\boxed{E_{\mu\nu} = \phi_{\nu,\mu} - \phi_{\mu,\nu}}$$ måste vara antisym.!

$$\Rightarrow E_{\mu\nu,\varrho} = \phi_{\nu,\mu\varrho} - \phi_{\mu,\nu\varrho} \Rightarrow (2) \text{ uppfylld}$$

((2) är ett nödv och tillr. krav för $\mathcal{E}$ av potential)

Med ϕ återstår bara att lösa (1)!

$$\Rightarrow g^{\mu\sigma}\left(\phi_{\nu,\sigma\mu} - \phi_{\sigma,\nu\mu}\right) = \frac{4\pi}{c} J_\nu \qquad (\dagger)$$

ϕ är inte unikt bestämd

$$\phi_\mu = \tilde{\phi}_\mu + \psi_\mu \quad ; \quad \psi_{\mu,\nu} - \psi_{\nu,\mu} = 0 \quad (*)$$

ny gammal

$\Rightarrow$ bidrar inte till $E_{\mu\nu}$

$$(*) \Rightarrow \psi_\mu = \Theta_{,\mu}$$ ← potential

Lorenz gauge villkor

Använd friheten att välja ψ till att sätta $\boxed{\phi^\mu{}_{,\mu} = 0}$

$\Rightarrow$ andra termen i $(\dagger)$ ovan är noll.

$(1) \Longrightarrow \boxed{\underbrace{\Box}_{g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \phi_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu}$

D'Alembertianen = "box"

retarderad ← dvs tiden att nå P tagen hänsyn till

$\xrightarrow{\text{vektoranalys}} \quad \phi_\mu(P) = \frac{1}{c}\int \frac{[J_\mu]\,dV}{r}$

↑ Pkt. från vilken vi mäts

∴ Det finns alltid en <u>enkel</u> <u>explicit</u> lösning!

⟹ Uppfyller alltså $\phi^{\mu}{}_{,\mu}$ pga $J^{\mu}{}_{,\mu}$.

<u>OBS</u> Där $J_\mu = 0$, dvs i laddningsfria regionen

$\Longrightarrow \Box E_{\mu\nu} = 0$

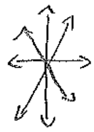
∴ Störningar i det EM-fältet är vågor som rör sig med ljusets hastighet.

Fältet från en punktladdning som rör sig likformigt

Nu ser vi styrkan i LT!

Fältet från en punktladdning  $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$

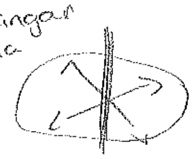
Standard LT ⟹ fältet från en pkt.laddning som rör sig likformigt

Längdkontraktion ⟹ 

Fältet från en oändligt lång rak ström

LT ⟹ Relativistiska fält från en ström

laddningar i vila



Gauss flödesteorem $E \sim \frac{1}{r}$

Läs i boken om hur fält från en riktig ledare uppstår! (kap 7)

- mm/s
- joner som står still a
- längdkontraktion förklarar fältet!