Mathematical Physics FTF131

Time: December 18, 2007
Examiner: Jari Kinaret, tel. 772 3668, 0706-457268
This examination contributes 45% to the final grade of the course. The limits for different grades are: 0-39.9% fail, 40-59.9% grade 3/5, 60-79.9% grade 4/5, 80-100% grade 5/5

Allowed material: No material is allowed. A pocket calculator with no connection to external memories is OK.

1. *Integrals.*
(a) How would you determine the approximate value of the integral

$$\int_0^1 dx\, e^x \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$

for large n? (3p)
(b) How would you evaluate the approximate behavior of the integral

$$\int_0^\pi dt\, \sqrt{t}\, e^{x\cos t}$$

for $x \longrightarrow +\infty$? (2p)

2. *Differential equations.* How would you determine an approximate solution of the differential equation

$$y'' - xy = 0$$

for $x \longrightarrow +\infty$? (4p)
3. *Integral equations.* Describe how you would solve the following integral equations, and explain why you would choose the particular methods (2p each of the three problems). Use a different method in each case!
(a)

$$f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} f(y)$$

(b)

$$f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-(x-y)^2} f(y)$$

(c)

$$f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[e^{-y^2} + e^{-(x-y)^2}\right] f(y)$$ neumanns metod

4. *Singular perturbation theory.* Consider the Rayleigh oscillator described by

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \epsilon \left[\omega_0 \dot{y} - \frac{1}{3\omega_0} (\dot{y})^3 \right]$$
$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 2\omega$$

where ϵ is a small positive parameter. How would you determine the behavior of $y(t)$ for large times (to leading order in ϵ)? (4p)

5. *Variational calculus.* (a) Consider a rectangular hollow cavity with cross section $W \times L$ and depth H (see illustration below). The cavity is closed with a thin membrane (with a negligible mass) that is attached to the edge (rim) of the rectangular opening. How would you determine the shape of the membrane when the cavity contains volume V of a gas? Note that the membrane assumes a shape that minimizes its surface area. (3p)
(b) Assume now that instead of having the edge of the membrane fixed to the rim, it is free to move between the bottom and the rim of the cavity (but remains attached to all four walls). What boundary conditions must now be satisfied by the membrane? What is the optimal shape of the membrane for $V < W \times L \times H$? (2p)

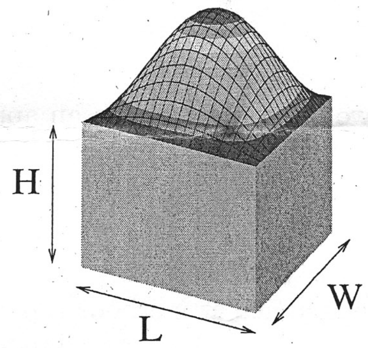


FIG. 1: Illustration for problem no. 5.

School Linje	Year of Admission Antagningsår	Date of Birth Year Month Day / Identification no Personnummer Civil registration no. år | mån | dag | nummer	Examination date Tentamensdatum	Number of Pages Antal blad		Certificate Betyg
F	05		2007-12-18	18		

Signature Namnteckning	Family name+First name (Block letters) Efternamn+Förnamn+Initialer(textas)
Staffan Haglund	Haglund Staffan P-Å

CHALMERS
EXAMINATION / TENTAMEN

FTF131 Mathematical Physics

(Tentamensnamn / Course)

Solved Problems Behandlade uppgifter No / nr	Cross (Sätt kryss)	Points for question Poäng på Uppgiften	Remark Anm.
1	X	6	
2	X	$1\frac{1}{2}$	
3	X	6	
4	X	4	
5	X	4	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
Total points Summa poäng på tentamen		$21\frac{1}{2}$	utmärkt!

Anm: Rutor inom bred kontur ifylles av examinator.

CHALMERS	Civil registration no / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 1
	Print name / Textat namn: Staffan Hägglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. / Uppgift nr: 1

a) Bestäm för stora n.

$$I = \int_0^1 dx\, e^x \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$

$$I = \int_0^1 dx\, e^x e^{n\ln x - n\ln(1+x^2)} = \int_0^1 dx\, e^x e^{n(\ln x - \ln(1+x^2))}$$

vi har ett fall motsvarande steepest descent.

största delen av integralens värde ges för exponentens max $(\max[\ln x - \ln(1+x^2)]$

vi finner max:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\ln x - \ln(1+x^2)\right) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$\Rightarrow x = \pm 1$, $x = -1$ finns ej i området

alltså exponenten har max för $x = 1$.

andraderivatan ger (för att vara säker)

$$\frac{d^2}{dx^2}: \ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x^2)} + 2x\frac{\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

för $x=1$ ges

$$-1 - 1 + \frac{4}{4} = -1 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

utveckling kring $x=1$ ger

$x = 1 + \delta x$

$$\ln(1+\delta x) - \ln(1 + (1+\delta x)^2) = \ln(1+\delta x) - \ln(2 + 2\delta x + \delta x^2)$$

$$= \ln(1+\delta x) - \ln 2 - \ln\left(1 + \delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right) = \text{taylor}$$

4

CHALMERS	Civil registration no / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 2
	Print name / Textat namn: Staffan Häglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. / Uppgift nr: 1

a) $$= \left(\delta x - \frac{\delta x^2}{2} + O(\delta x^3)\right) - \ln 2 - \left(\delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\delta x^2 + O(\delta x^3)\right)$$

$$= \underset{x}{\delta x} - \frac{\delta x^2}{2} - \ln 2 - \underset{x}{\delta x} - \frac{\delta x^2}{2} + \frac{1}{2}\delta x^2 = -\ln 2 - \frac{\cancel{3}\,1}{2}(\delta x)^2$$

Insättning i integralen ger där vi integrerar från $0 \to \infty$ och delar med 2 ty $\int_1^\infty \approx \int_0$ ty max på randen (förre)

Vi kan även sätta $e^x \approx e^1 = e$ ty integranden avtar mycket snabbt utanför en liten närhet till $x=1$

$$\Rightarrow I \approx \frac{e^1}{2}\int_0^\infty e^{-n\ln 2}\, e^{-\frac{1}{2}n(\delta x)^2}\,\delta x =$$

$$= \frac{e}{2\cdot 2^n}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}n(\delta x)^2}\,\delta x = \text{gaussisk integral}$$

$$= \frac{e}{2\cdot 2^n}\cdot\left(\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}n}}\,\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{e}{2^{n+2}}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}}$$

bra! 3/3

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan

4

CHALMERS	Civil registration no Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. Löpande sid nr 3
	Print name Textat namn: Staffan Höglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. Uppgift nr 1

b)

$$\int_0^{\pi} dt \sqrt{t}\, e^{x\cos t} \qquad x \to +\infty$$

jag sätter $u = t^{3/2}$ $\quad du = \frac{3}{2} t^{1/2} dt \Rightarrow \frac{2du}{3} = \sqrt{t}\, dt$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi^{3/2}} \frac{2}{3} du\, e^{x\cos(u^{2/3})}$$

$\cos(u^{2/3})$ har max för $u = 0, 2\pi$

men $\pi\sqrt{\pi} < 2\pi$ varför $\exists$ 1 max.

om vi utvecklar

$\cos(u^{2/3})$ kring $u=0$ ges

$$\cos(u^{2/3}) \approx 1 - \frac{(u^{2/3})^2}{2} + O((u^{2/3})^4) = 1 - \frac{u^{4/3}}{2}$$

vi har

$$\frac{2}{3}\int_0^{\pi^{3/2}} du\, e^{x\left(1 - \frac{u^{4/3}}{2}\right)} = \frac{2}{3}e^x \int_0^{\pi^{3/2}} e^{-\frac{u^{4/3}}{2}x}$$

Denna avtar så snabbt att den största delen finns i området $[0, \pi^{3/2}]$

vi kan därför säga

$$\frac{2}{3}e^x \int_0^{\pi^{3/2}} e^{-\frac{u^{4/3}}{2}x} du \approx \frac{2}{3}e^x \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{4/3}}{2}x} du$$

sätter vi $\frac{x u^{4/3}}{2} = v \Rightarrow u = \left(\frac{2v}{x}\right)^{3/4} \Rightarrow du = \frac{2^{3/4}}{x^{3/4}} v^{-1/4} \frac{3}{4}$

(Det blir ej $\frac{1}{2}$ som i uppg a) ty vi har max vid undre gränsen, ej övre.)

CHALMERS	Civil registration no / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 4
	Print name / Textat namn: Staffan Höglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. / Uppgift nr: 1

b) variabelbytet ger

$$I \approx \frac{2}{3} e^x \int_0^\infty e^{-\frac{u^{4/3}}{2}} du = \frac{2}{3} e^x \int_0^\infty \frac{e^{-v} 2^{3/4} v^{-1/4}}{x^{3/4}} \frac{3}{4} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2^{3/4} e^x}{x^{3/4}} \int_0^\infty v^{-1/4} e^{-v} dv = \frac{2^{-1/4} e^x}{x^{3/4}} \int_0^\infty v^{\frac{3}{4}-1} e^{-v} dv = \frac{2^{-1/4} e^x}{x^{3/4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

Svar: $I \approx \frac{2^{-1/4} e^x}{x^{3/4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

bra! 3/3

$y'' - xy = 0$ Beräkna asymptotiskt, $x \to \infty$

Ser om $x = \infty$ är en ISP

$x = \frac{1}{t}$, $t \to 0$

$y_x = y_t t_x = y_t\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2 y_t$

$y_{xx} = (-t^2 y_t)_x = (-t^2 y_t)_t t_x = -t^2(-2t y_t - t^2 y_{tt}) = t^4 y_{tt} + 2t^3 y_t$

insättning:

$t^4 y_{tt} + 2t^3 y_t - \frac{1}{t} y = 0 \Rightarrow y_{tt} + \frac{2}{t} y_t - \frac{1}{t^5} y$

$\Rightarrow$ singulariteten vid $t = 0$ upphävs ej vid termvis multiplikation av t^{n-i} där i är derivatans ordning & n är högsta ordningen

ISP $\Rightarrow$ kan använda $y = e^{S(x)}$ som ansättning

$$\begin{cases} y = e^{S(x)} \\ y' = S'(x) e^{S(x)} \\ y'' = [S''(x) + S'(x)^2] e^{S(x)} \end{cases}$$

insättning:

$[S''(x) + S'(x)^2 - x] e^{S(x)} = 0 \Rightarrow S''(x) + S'(x)^2 - x = 0$

vi antar $S''(x) \ll S'(x)^2$ då $x \to \infty \Rightarrow$

$S'(x)^2 - x = 0 \Rightarrow S'(x) = \pm\sqrt{x} \Rightarrow S(x) = \pm \frac{2}{3} x^{3/2}$

Vi undersöker antagandet:

$S''(x) = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ll (\pm\sqrt{x})^2 = x = S'(x)^2 \Rightarrow S''(x) \ll S'(x)^2$ håller

i första ordningen går y som $\underline{\underline{y = e^{\pm \frac{2}{3} x^{3/2}}}}$, $x \to \infty$

Vidare ansättning $y = e^{S(x) + T(x)}$ med insättning, ger noggrannare asymptotiska beteende.

4

CHALMERS	Civil registration no / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. / Löpande sid nr 7
	Print name / Textat namn: Staffan Höglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. / Uppgift nr 3

a) $f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} f(y)$

vi har en separerbar kärna

$\phi_1(x) = 1 \quad \psi_1(y) = e^{-y^2}$

multiplicerar med e^{-x^2} och integerar över dx

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx}_{f} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx}_{i)} + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(y)\, dy}_{f}$$

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = [p.i] = \underbrace{\left[-\frac{x}{2} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} f \Rightarrow f(1-2\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

om $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ges

$$f = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-2\lambda)}$$

$$\Rightarrow f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(y)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-\lambda \cdot 2)}$$

insättning i första ekvationen ger

$$f(x) = x^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2(1-\lambda \cdot 2)} \right) = x^2 + \frac{\lambda}{1-2\lambda}$$

2

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 + \frac{\lambda}{1-2\lambda}}$$ med separerbar kärna

4

CHALMERS	Civil registration no / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. / Löpande sid nr 8
	Print name / Textat namn: Staffan Haglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. / Uppgift nr 3

b) $$f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-(x-y)^2} f(y)$$

vi kan ej separera kärnan men kärnan liknar en faltning varför vi kan göra en $\mathcal{F}$-transform.

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{ikx} dx + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \hat{f}(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} dx$$

ur detta kan vi erhålla $\hat{f}(k)$:

$$\hat{f}(k) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{ikx} dx}{1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} dx}$$

Utför ej integralerna utan kallar dem för namn;

$$\hat{f}(k) = \frac{\hat{I}_1(k)}{1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \hat{I}_2(k)}$$

2

inverstransformen ger

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{I}_1(k)}{1 - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \hat{I}_2(k)} e^{-ikx} dk$$

den sista integralen löses med residykalkyl och $\hat{I}_1(k)$ och $\hat{I}_2(k)$ löses mycket enkelt.

$\hat{I}_1(k)$ med partiell integration och

$\hat{I}_2(k)$ med kvadratkomplettering.

noterade just att $\hat{I}_1(k) = 2\int_0^{\infty} x^2 \cos(kx)$ vilken ej konvergerar. Laplace är i halvplanet vilket ej fungerar heller. Formellt är detta i alla fall tillvägagångssättet.

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan

4

CHALMERS	Civil registration no. Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. Löpande sid nr 9
	Print name Textat namn: Staffan Höglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. Uppgift nr 3

c) $$f(x) = x^2 + \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Big[\underbrace{e^{-y^2} + e^{-(x-y)^2}}_{K(x,y)} \Big] f(y)$$

ej separerbar, ej heller faltning.

vi antar att $|\lambda| \cdot | e^{-y^2} + e^{-(x-y)^2} | < 1$ varför vi kan använda (neumanns metod) (tror det hette så)

Vi antar att $f(y) \approx x^2$ och sätter in $f(x)$ som $f(y)$ (vi gör det bara i ett steg)

$$f(x) \approx x^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, K(x,y) \Big[y^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy'\, K(y,y')\, y'^2 \Big]$$

$$= x^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, K(x,y)\, y^2 + \frac{4\lambda^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} K(y,y')\, y'^2\, dy'$$

om $|\lambda| \cdot | K(x,y)| < 1$ konvergerar denna metod.

2

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan.

4

CHALMERS	Civil registration no. Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. Löpande sid nr 10
	Print name Textat namn: Staffan Hoglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. Uppgift nr 4

vi har

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon\left(\omega_0 \dot{y} - \frac{1}{3\omega_0}\dot{y}^3\right) \qquad y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=2\omega$$

där ε är liten

hur skulle man bestämma $y(t)$'s uppförande för stora t.

Vi antar att det kan bli resonans pga högerledet och vill därför separera den snabba tidsskalan från den långsamma på vilken en resonans kan uppstå

vi sätter $y(t) = y(t,\tau)$ $\quad \tau = t\cdot\varepsilon$ $\qquad$ +1

Beräknar derivatan:

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \underline{\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \tau}\cdot\varepsilon}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t\partial \tau}\varepsilon + \frac{\partial y}{\partial \tau \partial t}\varepsilon + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\varepsilon^2 = \underline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}}$$

insättning ger:

$$y_{tt} + 2\varepsilon y_{t\tau} + \varepsilon^2 y_{\tau\tau} + \omega_0^2 y = \varepsilon\left(\omega_0(y_t + \varepsilon y_\tau) - \frac{1}{3\omega_0}(y_t + y_\tau\varepsilon)^3\right)$$

Vi ansätter en lösning

$$y(t) = Y_0(t,\tau) + Y_1(t,\tau)\cdot\varepsilon$$

insättning ger

$$Y_{0tt} + Y_{1tt}\cdot\varepsilon + 2\varepsilon(Y_{0t\tau} + Y_{1t\tau}\varepsilon) + \varepsilon^2\left[Y_{0\tau\tau} + \varepsilon Y_{1\tau\tau}\right] + \omega_0^2(Y_0 + Y_1\varepsilon)$$

$$= \varepsilon\left[\omega_0\left[Y_{0t} + Y_{1t}\cdot\varepsilon + \varepsilon Y_{0\tau} + \varepsilon^2 Y_{1\tau}\right] - \frac{1}{3\omega_0}\left[Y_{0t} + \varepsilon Y_{1t} + \varepsilon Y_{0\tau} + \varepsilon^2 Y_{1\tau}\right]^3\right]$$

+1

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan.

vi kräver likhet för varje ordning av ε.

$\varepsilon^{(0)}$; $Y_{0tt} + \omega_0^2 Y_0 = 0$

$\varepsilon^{(1)}$; $Y_{1tt} + 2Y_{0t\tau} + \omega_0^2 Y_1 = \omega_0 Y_{0t} - \frac{1}{3\omega_0} Y_{0t}^3$

$\varepsilon^{(2)}$; ......

$\varepsilon^{(0)}$; ger $\frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 Y_0 = 0$

$\Rightarrow Y_0(t,\tau) = A_1(\tau)\sin(\omega_0 t) + B_1(\tau)\cos(\omega_0 t)$

för att $Y_0(t,\tau) \in \mathbb{R}$ krävs $B(\tau) = A(\tau)^*$ vi skriver

$\Rightarrow Y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + B(\tau)e^{-i\omega_0 t}$

$\varepsilon^{(1)}$; $Y_{1tt} + \omega_0^2 Y_1 = \omega_0 Y_{0t} - \frac{1}{3\omega_0} Y_{0t}^3 - 2Y_{0t\tau}$

insättning av Y_0 ger

$= \omega_0\left[Ai\omega_0 e^{i\omega_0 t} - A^* i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}\right] - \frac{1}{3}\omega_0^{-1}\left[Ai\,e^{i\omega_0 t} - A^* i\,e^{-i\omega_0 t}\right]^3 \omega_0^3$

$- 2\omega_0 i\left[A' e^{i\omega_0 t} - A^{*\prime} e^{-i\omega_0 t}\right]$

potens av ω_0, inget avdrag-

$= e^{i\omega_0 t}\left[iA\omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_0^4 3(Ai)^2 \cdot (-A^* i) - 2\omega_0 i A'\right] +$

$e^{-i\omega_0 t}\left[-A^* i\,\omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_0^4 3(-A^* i)^2 Ai + 2\omega_0 i A^{*\prime}\right] + \mathcal{O}(e^{\pm 3i\omega_0 t})$

om koefficienterna vid $e^{i\omega_0 t}$ och $e^{-i\omega_0 t}$ blir noll ges ingen resonans. +/

Vi kräver att de skall vara noll och symmetrin säger att om en är noll är båda noll.

CHALMERS	Civil registration no. Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. Löpande sid nr 12
	Print name Textat namn: Staffan Höglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. Uppgift nr 4

vi får då:

$$A(\tau)\omega_0^2 - \omega_0^4 A^2(\tau) A^*(\tau) - 2\omega_0 A'(\tau) = 0$$

med ansättningen $A(\tau) = R(\tau) e^{i\theta(\tau)}$ ges

$$\omega_0 e^{i\theta(\tau)}\left[R(\tau)\omega_0 - R(\tau)^3\omega_0^3 - 2i\theta'(\tau)R(\tau) - 2R'(\tau)\right] = 0$$

både real- och imaginärdel måste vara noll.

$$\Rightarrow \quad \theta'(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(\tau) = \theta_0$$

$$\Rightarrow \quad R(\tau)\omega_0 - R^3(\tau)\omega_0^3 - 2R'(\tau) = 0$$

$$R'(\tau) = \frac{dR}{d\tau} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_0 R(1 - \omega_0^2 R^2) = 2\frac{dR}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{2\,dR}{\omega_0 R(1 - \omega_0^2 R^2)} \quad \Rightarrow$$

$$d\tau \Rightarrow \frac{2dR}{\omega_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{\omega_0^2 R}{1 - \omega_0^2 R^2}\right)$$

integrering ger

$$\tau = \frac{2}{\omega_0}\left(\ln R - \frac{1}{2}\ln(1 - \omega_0^2 R^2)\right) + C \qquad \text{(formellt)}$$

$$\Rightarrow \quad (\tau - C)\frac{\omega_0}{2} = \ln\left(\frac{R}{\sqrt{1 - \omega_0^2 R^2}}\right) \qquad \text{(formellt)}$$

$$[C_1 > 0] \quad \Rightarrow C_1 e^{+\tau\frac{\omega_0}{2}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \omega_0^2 R^2}} \quad \Rightarrow \quad C_1^2 e^{+2\tau\frac{\omega_0}{2}}(1 - \omega_0^2 R^2) = R^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_1^2 e^{+2\tau\frac{\omega_0}{2}}}{1 + C_1^2\omega_0^2 e^{+2\tau\frac{\omega_0}{2}}} = R^2 \quad \Rightarrow R(\tau) = \frac{C_1 e^{\tau\frac{\omega_0}{2}}}{\sqrt{1 + C_1^2 e^{+\tau\omega_0}\omega_0^2}}$$

CHALMERS

Civil registration no. / Person nr:

Print name / Textat namn: Staffan Höglund

Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)

Consecutive page no. / Löpande sid nr: 13

Question no. / Uppgift nr: 4

4

Nu har vi fått

$$y(t) = Y_0(t,\tau) + Y_1(t,\tau)\cdot\varepsilon$$

$$Y_0(t,\tau) = A(\tau)e^{i\omega_0 t} + A^*(\tau)e^{-i\omega_0 t} = Re[A(\tau)]\left[e^{i(\omega_0 t + Im A)} + e^{-(i\omega_0 t + Im A)}\right]$$

$$= 2\,Re[A(\tau)]\cos[\omega_0 t + Im[A]] =$$

$$= 2R(\tau)\cos[\omega_0 t + \theta(\tau)] =$$

$$= \frac{2\cdot C_1 e^{+\tau\frac{\omega_0}{2}}\cdot 1}{\sqrt{1+C_1^2\omega_0^2 e^{+\tau\omega_0}}}\cos[\omega_0 t + \theta_0]$$

$$\Rightarrow y(t) = Y_0(t,\tau) = \frac{2C_1 e^{\frac{\omega_0}{2}\tau}}{\sqrt{1+C_1^2\omega_0^2 e^{\tau\omega_0}}}\cos[\omega_0 t + \theta_0] + \underbrace{Y_1(t,\tau)\cdot\varepsilon}_{O(\varepsilon)}$$

Vill vi ha Y_1 ges den genom att lösa

$$Y_{1tt} + \omega_0^2 Y_1 = -\frac{1}{3}\omega_0\left[(Ai)^3 e^{i\omega_0 t\cdot 3} + (-A^* i)^3 e^{-3i\omega_0 t}\right]\cdot\omega_0^3$$

där vi har ett känt högerled.

vi har $y(0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2C_1 e^{+\frac{\omega_0\tau}{2}}}{\sqrt{1+C_1^2\omega_0^2 e^{+\tau\omega_0}}}\sin[\omega_0 t]$$

$\dot{y}(0) = 2\omega$

enda termen ~~kvar~~ vid deriverung med t=0 i tankarna är den där $\sin(\omega_0 t)$ deriveras (ty $\sin(0)=0$)

$$\Rightarrow \dot{y}(0) = \frac{2C_1}{\sqrt{1+C_1^2\omega_0^2}}\cos(0)\cdot\omega_0 = 2\omega$$

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan

4

CHALMERS	Civil registration no. / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 14
	Print name / Textat namn: Staffan Höglund		Question no. / Uppgift nr: 4

$$\Rightarrow \frac{2C_1}{\sqrt{1+\omega_0^2 C_1^2}} = \frac{2\omega}{\omega_0} \Rightarrow C_1^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(1+\omega_0^2 C_1^2\right)$$

$$\Rightarrow C_1^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1-\omega^2} \Rightarrow C_1 = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2C_1 e^{+\frac{\omega_0\tau}{2}}}{\sqrt{1+C_1^2\omega_0^2 e^{+\tau\omega_0}}}\sin(\omega_0 t) \quad \text{med } C_1 = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

med $\omega \to 1$ ges $\frac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

med $t \to \infty$, dvs $\tau = \varepsilon t \to \infty$ ges

$$y(t)_{t\to\infty} = \frac{2C_1}{C_1\omega_0}\sin\omega_0 t = \frac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

vi kan skriva

$$\boxed{y(t) = \frac{2C_1}{\sqrt{C_1^2\omega_0^2 + e^{-\tau\omega_0}}}\sin(\omega_0 t) \quad \text{med } C_1 = \frac{\omega}{\omega_0\sqrt{1-\omega^2}}}$$

och med $\boxed{y(t) \underset{t\to\infty}{\to} \frac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

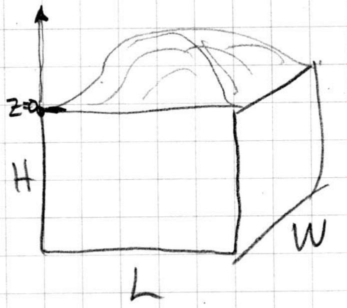
BRA!!

4

4

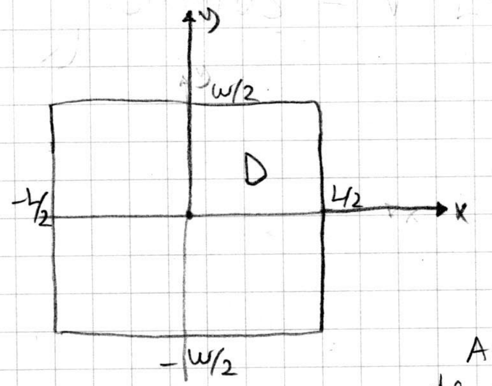
CHALMERS	Civil registration no. Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher) Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. Löpande sid nr 15
	Print name Textat namn: Steffen Hägglund		Question no. Uppgift nr 5

a)



låda med membran, inneslutandes volymen V.
hur är membranet format när "lådan" innehåller volymen V.

Vi kallar ytan för $z(x,y)$, sätter $z(x,y)=0$ vid lådans topp



Pga symmetri måste formen vara symmetrisk kring lådans mitt map x- & y-axeln.

Arean innesluten i 1a kvadranten är densamma som de andra fyra

Vi kallar:

$$V[z]=4\iint_D z(x,y)\,dS = V-H\cdot L\cdot W$$

volymen innesluten av lådan och membranet.

$$A[z]=4\iint_D |\nabla\cdot z(x,y)|\,dS = 4\iint \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}\,dS$$

bra!

vi skriver

$$I[z]=A[z]-\lambda V[z] = 4\iint_D \underbrace{\left[\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}-\lambda z(x,y)\right]}_{L} dS$$

+1

och använder (alltså) Lagrange multiplikator & Euler-Lagrange:

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan.

4

CHALMERS	Civil registration no. / Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr: 16
	Print name / Textat namn: Staffan Hagland		Question no. / Uppgift nr: 5

a)

vi vill minimera $A[z]$ med $V[z]$ som bivillkor;

Minimum (kan) ges då $\frac{\delta I[z]}{\delta z(x,y)} = 0$ +1

Euler-Lagrange ger (med fasta randvillkor så att substitutionstermerna försvinner), $L = L[x, y, z, z_x, z_y]$

$$\frac{\delta I[z]}{\delta z[x]} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_x}$$

det blir två ekvationer pga att z beror av 2 variabler

$$\frac{\delta I[z]}{\delta z[y]} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial z_y}$$

$$\left[\int\left(\frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial z_x}\delta z_x\right)dx = [\text{part int}] = \int \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial z_x}\delta z\right]_{\partial D}}_{0} - \int \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_x}\delta z \right.$$

$$\left. = \int\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_x}\right)\delta z \, dx \right]$$

kort härledning till Euler-Lagrange

detta är lite annorlunda med 2 variabler

$\frac{\delta I[z]}{\delta z} = 0$ nödvandigt villkor för extremvärde

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z_x} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial z_y} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda - \frac{d}{dx}\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} = 0$$

och motsvarande för y.

$$\Rightarrow -\lambda x + C_1 = \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \Rightarrow \begin{cases} z_x^2 = (C_1 - \lambda x)^2 (z_x^2 + z_y^2 + 1) & (1) \\ z_y^2 = (C_2 - \lambda y)^2 (z_x^2 + z_y^2 + 1) & (2) \end{cases}$$

för y-variabeln ges $\Rightarrow$ (2)

detta ger ett ekvationssystem:

CHALMERS	Civil registration no. Person nr:	Points for question (to be filled in by teacher)	Consecutive page no. Löpande sid nr 17
	Print name Textat namn: Steffen Häglund	Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Question no. Uppgift nr 5

a)

ur (1): $z_x^2\left(1-(c_1-\lambda x)^2\right) = (c_1-\lambda x)^2(z_y^2+1)$

$$z_x^2 = \frac{(c_1-\lambda x)^2(z_y^2+1)}{1-(c_1-\lambda x)^2}$$

in i (2) ges:

$$z_y^2 = \frac{(c_2-\lambda y)^2}{(c_1-\lambda x)^2} z_x^2 = \frac{(c_2-\lambda y)^2}{(c_1-\lambda x)^2}\frac{(c_1-\lambda x)^2(z_y^2+1)}{1-(c_1-\lambda x)^2}$$

$$\Rightarrow z_y^2\left[1-(c_1-\lambda x)^2-(c_2-\lambda y)^2\right] = (c_2-\lambda y)^2$$

$$\Rightarrow z_y = \frac{c_2-\lambda y}{\left(1-(c_1-\lambda x)^2-(c_2-\lambda y)^2\right)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2\lambda}\ln\left[1-[c_1-\lambda x]^2-[c_2-\lambda y]^2\right]$$

$$\boxed{z[x,y] = \frac{1}{2\lambda}\ln\left[1-[c_1-\lambda x]^2-[c_2-\lambda y]^2\right]}$$

c_1, c_2, λ bestäms av randvillkor

$$\iint_D z[x,y]\,dS = V - W\cdot L\cdot H \quad \text{samt 2 till}$$

t. ex $z_y(0,0) = z_x(0,0)$ och $z[x,y]\big|_{\partial D} = 0$

ytre

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper

b) om den inte är fixerad i kanten men i de fyra väggarna på någon position får vi en extra term från den partiella integreringen som måste vara noll.

$$\frac{\partial L}{\partial z_x}\Big|_{\partial D} = \frac{\partial L}{\partial z_y}\Big|_{\partial D} = 0 \qquad \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}} = \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}} = 0 \Rightarrow z_x = z_y = 0$$

+)

yttre randen (ej uppdelningsranden (i 4 delar))

För $V < W \cdot L \cdot H$ är det uppenbart att den optimala formen är ett plan parallellt +) med bottenytan. Det ger absolut den minsta arean möjlig

Vi kräver alltså som randvillkor att

$z_x = z_y = 0$ på randen dvs vid lådans kanter.

Detta överensstämmer med $V < W \cdot L \cdot H$ som ger ett $z = \text{konstant}$.