Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 21 augusti 2007, kl 14.00 – 18.00

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Mats Viberg, tel. 031 - 772 1773.

Betygslistan anslås senast den 3 september 2007 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 11 september 2007 kl 12.30 – 13.15 i E-huset, plan 6, rum 6404 (Mats Vibergs rum).

Tillåtna hjälpmedel:

- Valfri kalkylator, dock utan färdiga program
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar, dock ej lösta exempel

OBS: Glöm ej tydligt skrivet namn och personnummer på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!

1. (a) Ett tidsdiskret LTI-system beskrivs av differensekvationen

$$y[n] - 0.8y[n-1] = x[n]$$

Insignalen $x[n]$ fås genom att sampla den kontinuerliga signalen $x(t) = \cos(1500t)$ med samplingsintervallet $T_s = 0.001$ s. Bestäm den stationära utsignalen $y[n]$! (3p)

(b) En tidskontinuerlig signal ges av

$$x(t) = 2\sin(6\pi t) - \cos(14\pi t)$$

Avgör om signalen är periodisk, samt ange i så fall periodtiden T! (3p)

(c) Ett tidskontinuerligt filter beskrivs av sambandet

$$2\dot{y}(t) + 5y(t) = \dot{x}(t)$$

där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal. Ange vilken typ av filter det är (LP eller HP), samt bestäm dess 3 dB brytfrekvens ω_c! (4p)

2. (a) En tidskontinuerlig signal $x(t)$ passerar genom ett idealt LP-filter med brytfrekvensen 8000π rad/s. Utsignalen från filtret samplas sedan med samplingstiden $T_s = 0.5$ ms. Den resulterande digitala signalen ges då av $x[n] = \cos(0.8\pi n)$. Ange ett uttryck för ursprungssignalen $x(t)$! Om flera alternativ är möjliga skall samtliga redovisas för full poäng. (5p)

(b) En periodisk triangelvåg har Fourierserieutvecklingen

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{1}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)$$

Signalen $x(t)$ utgör insignal till ett LTI-system med impulssvaret

$$h(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t}$$

Låt den stationära utsignalen vara $y(t)$. Bestäm de värden på L för vilka $y(t)$ endast innehåller en sinusformad signal (grundtonen), förutom en eventuell konstant medelnivå. (5p)

3. En RC-krets beskrivs av sambandet

$$RC\,\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t)$$

där $v_i(t)$ är pålagd spänning och $v_o(t)$ betecknar utspänningen. I detta problem studeras sampling av filtret.

(a) Gör en tidsdiskret approximation av filtret genom att ersätta derivatan med en differenskvot (bakåt-differens). Låt samplingstiden vara T_s s. Ange det tidsdiskreta filtrets överföringsfunktion $H(z)$. (3p)

(b) Bestäm frekvensfunktionen för det tidskontinuerliga filtret och dess tidsdiskreta approximation. Ange bägge frekvenssvaren som funktion av vinkelfrekvensen ω i rad/s, dvs utan normalisering. (4p)

(c) Skissa amplitudkaraktäristiken för de två filtren. Visa på likheter och skillnader samt diskutera hur samplingsfrekvensen kan väljas. (3p)

4. Man önskar dimensionera ett tidskontinuerligt lågpassfilter med 3 dB gränsfrekvens $f_c = 600$ Hz. DC-förstärkningen skall vara 10 dB. Filtrets amplitudkaraktäristik skall vara av Butterworth-typ:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2N}} \qquad \text{(Normaliserat filter)}$$

(a) Bestäm filtrets gradtal N så att dämpningen vid $f_s = 1200$ Hz är minst 20 dB. (3p)

(b) Ange en överföringsfunktion $H(s)$ som uppfyller ovanstående specifikationer. (5p)

(c) Antag att ovanstående analoga filter omvandlas till ett digitalt filter med hjälp av bilinjär transformation:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Vad får det digitala filtret för 3 dB gränsfrekvens (i Hz) om samplingstiden är $T_s = 0.2$ ms? (2p)

5. Ett N:te ordningens digitalt FIR-filter har impulssvaret $h[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N$ (och $h[n] = 0$ för $n < 0$ och $n > N$). Antag att N är udda och att $h[n]$ är symmetriskt, dvs

$$h[n] = h[N-n], \; n = 0, 1, \ldots, N.$$

(a) Bestäm frekvensfunktionen $H(e^{j\omega})$ till FIR-filtret! (1p)

(b) Visa att filtret har linjär fas (i passbandet)! (8p)

(c) Bestäm filtrets grupplöptid! (1p)

Lösningsförslag/svar till Tentamen i ESS 010 Signaler och System E3 21 augusti 2007

1. (a) Insignalen är $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$, där $\Omega_0 = 1.5$ rad/sampel. Systemets överföringsfunktion fås som

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}}$$

Sinus in ger sinus ut i stationäritet:

$$y[n] = |H(e^{j\Omega_0})| \cos(\Omega_0 n + \arg\{H(e^{j\Omega})\}) \approx 0.81 \cos(1.5n - 0.70)$$

(b) Signalen är periodisk om $x(t) = x(t - T)$ för något T. De två sinusarna har periodtiderna $T_1 = (2\pi)/(6\pi) = 1/3$ s respektive $T_2 = (2\pi)/(14\pi) = 1/7$. Periodtiden T ges av

$$T = mT_1 = nT_2$$

om denna ekvation har en lösning med avseende på heltalen m och n. Vi ser att $m = 3$ och $n = 7$ ger $T = 1$. Signalen är alltså periodisk med periodtiden 1 s.

(c) Filtrets frekvensfunktion blir

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{2j\omega + 5} = \frac{j\omega/2}{j\omega + 5/2}$$

Eftersom $|H(0)| = 0$ och $|H(j\infty)| = 1/2$ så är filtret av högpasskaraktär. Brytfrekvensen (3 dB) ges av $\omega_c = 5/2$ rad/s, eftersom $|H(j\omega_c)|^2 = |H(j\infty)|^2/2$.

2. (a) Samplingsfrekvensen är 4000π rad/s, vilket ger att signaler "viks ner" kring Nyqvist-frekvensen 2000π rad/s. LP-filtret bryter vid 8000π rad/s, så vikning kan ha förekommit flera gånger! "Grundfrekvensen" är $\omega = 0.8\pi f_s = 1600\pi$. Samtliga möjliga frekvnser är

$$\omega \in \{1600\pi, 2400\pi, 5600\pi, 6400\pi\}$$

Svar: $x(t) = \cos \omega t$ med ω enligt ovan!

(b) LTI-systemet är ett idealt LP-filter med brytfrekvens $\omega_c = 100\pi$ rad/s. Insignalens grundton har frekvensen $\omega_0 = \pi/L$ rad/s. Denna faller inom LP-filtrets passband då $\pi/L < 100\pi$, dvs $L > 1/100$. Första övertonen har frekvensen $\omega_3 = 3\pi/L$ rad/s. Denna faller inom LP-filtrets passband då $3\pi/L < 100\pi$, dvs $L > 3/100$. Signalen innehåller alltså precis en sinus då $1/100 < L < 3/100$.

3. (a) Differensapproximation:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} \approx \frac{v_o(t) - v_o(t-T)}{T}$$

Den digitala signalen $v_o[n]$ är $v_o(t)$ i sampeltillfällena, dvs $t = nT$. Alltså ersätter vi derivatan i diskret tid med

$$\frac{v_o[n] - v_o[n-1]}{T}$$

Differensekvationen blir då

$$RC\,\frac{v_o[n] - v_o[n-1]}{T} + v_o[n] = v_i[n]$$

Z-transformering ger överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{T}{RC + T - RCz^{-1}}$$

(b) Det kontinuerliga systemet har frekvensfunktionen

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

och för den tidsdiskreta approximationen får vi

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{T}{RC + T - RCe^{-j\Omega}}$$

Uttryckt i $\omega = \Omega T$ rad/s blir detta

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{T}{RC + T - RCe^{-j\omega T}}$$

(c) Det kontinuerliga systemet är ett RC-filter av lågpasskaraktär. DC-förstärkningen är $|G(j0)| = 1$, och $|G(j\omega)|$ avtar monotont mot noll då $\omega \to \infty$. Brytfrekvensen (3 dB) är $\omega_c = 1/RC$ rad/s. För $\omega T \ll 1$ har vi $e^{-j\omega T} \approx 1 - j\omega T$, så att $G(j\omega) \approx H(e^{j\omega T})$. Det diskreta filtret har dock en periodisk amplitudkaraktäristik, med perioden $\Omega = 2\pi$

rad/sampel, dvs $\omega = 2\pi/T$ rad/s. Vid Nyquist-frekvensen $\omega_N = \pi/T$ har vi $|H(e^{j\omega_N T})| = T/(2RC + T)$. Det diskreta filtret kommer därför att likna det kontinuerliga väl för $|\omega| \leq \pi/T$ förutsatt att $T \ll 2RC$. Lågpasskaraktäristiken kring $\omega = 0$ upprepas sedan periodiskt kring $\omega = 2\pi/T, \omega = 4\pi/T$ etc. Om T väljs för stor är det inte ens säkert att $|H(e^{j\omega T})|$ är av LP-karaktär!

4. (a) Eftersom $f_s/f_c = 2$ så skall N väljas så att det normaliserade filtret ger 20 dB dämpning vid $\omega = 2$:

$$|H(j2)|^2 = \frac{1}{1 + 2^{2N}} \leq 0.01$$

Vi får $2^{2N} \geq 99$, vilket kräver $N = 4$.

(b) Polerna ges av

$$s = \omega_c \times \{e^{\pm j5\pi/8},\ e^{\pm j7\pi/8}\}$$

där $\omega_c = 1200\pi$. Slå ihop parvis:

$$\begin{aligned}(s - \omega_c e^{j5\pi/8})(s - \omega_c e^{-j5\pi/8}) &\approx s^2 + 2885s + 1.4212\,10^7 \\ (s - \omega_c e^{j7\pi/8})(s - \omega_c e^{-j7\pi/8}) &\approx s^2 + 6966s + 1.4212\,10^7\end{aligned}$$

Med observationen att DC-förstärkningen skall vara 10 dB blir den sökta överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{(s^2 + 2885s + 1.4212\,10^7)(s^2 + 6966s + 1.4212\,10^7)}$$

där $K = \omega_c^N\, 10^{10/20} \approx 6.3874\,10^{14}$.

(c) Den bilinjära transformation ger upphov till "warping":

$$\Omega = 2 \arctan \frac{\omega T_s}{2}$$

Därför blir $\Omega_c \approx 0.7210$ rad/sampel, vilket motsvarar ca 574 Hz.

5. (a) Frekvensfunktionen fås direkt från impulssvaret:

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \cdots + h[N]e^{-jN\omega}$$

(b) Eftersom $h[0] = h[N],\ h[1] = h[N-1], \ldots,\ h[(N-1)/2] = h[(N+1)/2]$ (N är udda) så får vi

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega}) &= h[0](1 + e^{-jN\omega}) + h[1](e^{-j\omega} + e^{-j(N-1)\omega}) + \cdots \\ &\quad + h\left[\frac{N-1}{2}\right](e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} + e^{-j\frac{N+1}{2}\omega})\end{aligned}$$

Nu bryter vi ut $e^{-j(N/2)\omega}$ ur varje term för att kunna använda Eulers formler (baklänges):

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= h[0]e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{N}{2}\omega}+e^{-j\frac{N}{2}\omega})+h[1]e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{N-2}{2}\omega}+e^{-j\frac{N-2}{2}\omega}) \\
&\quad +\cdots+h\left[\frac{N-1}{2}\right]e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}+e^{-j\frac{1}{2}\omega}) \\
&= e^{-j\frac{N}{2}\omega}\left\{h[0]2\cos\frac{N}{2}\omega+h[1]2\cos\frac{N-2}{2}\omega\right. \\
+\cdots &\quad \left. +h\left[\frac{N-1}{2}\right]2\cos\frac{1}{2}\omega\right\}
\end{aligned}$$

Vi får alltså

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\omega}H_r(\omega)$$

där $H_r(\omega)$ är en reell funktion. Så snart $H_r(\omega) > 0$ (dvs säkert i passbandet) så gäller

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{N}{2}\omega$$

Fasen är alltså en linjär funktion av ω.

(c) Grupplöptiden ges av

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial\arg\{H(e^{j\omega})\}}{\partial\omega} = \frac{N}{2}$$

och är konstant. Det betyder att "vågpaket" får samma tidsfördröjning, $N/2$ sampel, oberoende av frekvens.