Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 22 augusti 2006, kl 8.30–12.30

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Mats Viberg, tel. 031 - 772 1773.

Betygslistan anslås senast den 31 augusti 2006 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 1 september 2006 kl 12.30-13.30 i E-huset, rum 6414.

Tillåtna hjälpmedel:

- Valfri kalkylator, dock utan färdiga program
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar, dock ej lösta exempel

OBS: Glöm ej tydligt skrivet <u>namn</u> och <u>personnummer</u> på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!

1. (a) En digital signal $x[n]$ beskrivs av sambandet

$$x[n] = 2\sin\frac{\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{3}$$

Bestäm signalens RMS-värde! (3p)

(b) Impulssvaret till ett tidskontinuerligt system ges av

$$h(t) = (a\,e^{-bt} + c\,e^{-dt})u(t)$$

där $u(t)$ är enhetssteget och a, b, c, d är reella konstanter. För vilka värden på a, b, c, d är systemet stabilt? (3p)

(c) Nedan visas en kaskadkoppling av två tidsdiskreta delsystem:

$$\longrightarrow \boxed{H_1(e^{j\omega})} \longrightarrow \boxed{H_2(e^{j\omega})} \longrightarrow$$

System H_1 beskrivs av differensekvationen

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n]$$

($y[n]$ utsignal, $x[n]$ insignal), medan H_2 har följande frekvenskaraktäristik

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \ |\omega| \leq \pi/3 \\ 0 & , \ |\omega| > \pi/3 \end{cases}$$

Bestäm frekvensfunktionen $H(e^{j\omega})$ för det hopkopplade systemet, samt skissa dess amplitudkaraktäristik! (4p)

2. (a) En periodisk tidskontinuerlig signal $x(t)$ har periodtid $T = 4$. En period av signalen ges av

$$x(t) = 2 - t, \ 0 \leq t < 4$$

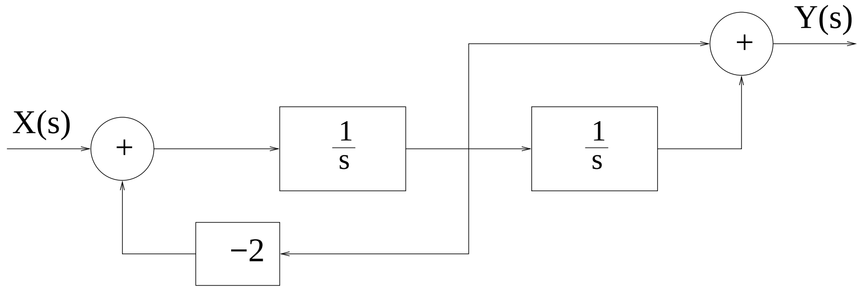
Signalen passerar genom ett idealt LP-filter med brytfrekvensen $\omega_c = 2$ rad/s. Bestäm den stationära utsignalen $y(t)$! (5p)

(b) Ett digitalt LP-filter har impulssvaret

$$h[n] = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

där $u[n]$ är enhetssteget. Samplingsfrekvensen är 1 kHz. Bestäm filtrets 3-dB brytfrekvens f_c i Hz! (5p)

3. Ett tidskontinuerligt system beskrivs av nedanstående blockschema:



(a) Bestäm systemets överföringsfunktion $G(s)$, samt avgör om systemet är BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabilt! (4p)

(b) Bestäm systemets stegsvar, dvs utsignalen $y(t)$ då insignalen är

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(Om du inte har fått fram ett uttryck för $G(s)$ så kan du använda $H(s) = (s+2)/(s^3 + 4s^2 + 3s)$) (6p)

4. I denna uppgift skall du dimensionera ett digitalt lågpassfilter med Butterworthkaraktäristik. Gränsfrekvensen (3 dB) skall vara $F_c = 100$ Hz, och DC-förstärkningen skall vara 1. Vid $F_s = 150$ Hz skall dämpningen vara minst 20 dB. Det digitala filtret skall beräknas genom bilinjär transformation:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

av ett analogt prototyp-filter. Samplingstiden är $T = 2$ ms.

(a) Bestäm specifikationerna för motsvarande analoga prototyp-filter. (2p)

(b) Bestäm nödvändigt gradtal för filtret. (2p)

Ledning: Den normaliserade Butterworth-karaktäristiken ges av

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}$$

(c) Bestäm det analoga Butterworth-filtrets poler! (3p)

(d) Bestäm det analoga prototyp-filtrets överföringsfunktion (2p)

(e) Applicera slutligen transformationen och ange det digitala filtrets överföringsfunktion! (1p)

5. Ett N:te ordningens digitalt FIR-filter har impulssvaret $h[n],\ n = 0, 1, \ldots, N$ (och $h[n] = 0$ för $n < 0$ och $n > N$). Antag att N är udda och att $h[n]$ är anti-symmetriskt, dvs

$$h[n] = -h[N - n],\ n = 0, 1, \ldots, N.$$

   (a) Bestäm frekvensfunktionen $H(e^{j\omega})$ till FIR-filtret! (1p)

   (b) Visa att filtret har linjär fas (i passbandet), under de angivna villkoren! (8p)

   (c) Bestäm filtrets grupplöptid! (1p)

Lösningsförslag/svar till Tentamen i ESS 010 Signaler och System E3 22 augusti 2006

1. (a) RMS-värdet är Root-Mean-Square, dvs roten ur effekten. Eftersom $\sin \omega n$ har effekten 1/2 så blir RMS-värdet

$$\sigma_x = \sqrt{2^2/2 + 1/2} \approx 1.58$$

(b) Systemet är stabilt om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$. Detta är uppenbarligen sant om och endast om $b > 0$ och $d > 0$ (a, c godtyckliga).

(c) Z-transformera differens-ekvationen:

$$y[n] = 0.8y[n-1] + 0.2x[n] \rightarrow Y(z)(1 - 0.8z^{-1}) = 0.2X(z)$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.2}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Det totala systemet ges av $H(z) = H_1(z)H_2(z)$, vilket ger

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{0.2}{1-0.8e^{-j\omega}} & |\omega| \leq \pi/3 \\ 0 & \pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Det blir ett "avklippt" lågpassfilter!

2. (a) Signalen är periodisk med periodtid $T = 4$, vilket ger grundfrekvensen $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$. Vi ser att signalen har DC-nivån (medelvärdet) 0, och resten av Fourier-serien fås t.ex. från Beta (där den ges utan DC-nivå). Man får

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi t}{2}$$

Det ideala LP-filtret släpper igenom DC komponenten och grundtonen perfekt, medan övertonerna släcks ut helt. Eftersom DC-komponent saknas får vi

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t$$

(b) Enligt tabell så har $h[n]$ Z-transformen

$$H(z) = \frac{0.25z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Amplitud-karaktäristiken ges därför av

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \left| \frac{0.25e^{-j\omega}}{(1 - 0.5e^{-j\omega})^2} \right|^2 = \frac{0.25^2}{(1 - 0.5e^{-j\omega})^2(1 - 0.5e^{j\omega})^2}$$

DC-förstärkningen är $|H(1)| = 1$, så 3 dB gränsen ges av $|H(e^{j\omega_c})| = 1/\sqrt{2}$. Vi får

$$\frac{0.25}{(1 - 0.5e^{-j\omega_c})(1 - 0.5e^{j\omega_c})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

vilket ger

$$\sqrt{2} = 5 - 4 \cos \omega_c$$

Slutligen får vi

$$\omega_c \approx 0.46 \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{0.46}{2\pi} 1000 \approx 73 \text{ Hz}$$

3. (a) Inför variabeln $Z(s)$ alldeles efter första summationen. Då fås

$$Z(s) = X(s) - \frac{2}{s} Z(s) \quad \Rightarrow \quad Z(s) = \frac{s}{s+2} X(s)$$

Sedan fås utsignalen som $Y(s) = (1/s)Z(s) + (1/s^2)Z(s)$, vilket ger

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} X(s) = G(s)X(s)$$

Systemets poler är $s = \{0, -2\}$, och det är inte BIBO-stabilt pga polen i origo.

(b) Insignalens Laplace-transform är $X(s) = 1/s$, så utsignalen blir

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}$$

För att kunna inverstransformera $Y(s)$ behöver vi först partialbråksuppdela. Det görs enklast i två steg, varje med hjälp av handpåläggningsmetoden:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{s+1}{s(s+2)}\right] \\ &= \frac{1}{s}\left[\frac{0.5}{s} + \frac{0.5}{s+2}\right] \\ &= \frac{0.5}{s^2} + \frac{0.5}{s(s+2)} \\ &= \frac{0.5}{s^2} + \frac{0.25}{s} - \frac{0.25}{s+2} \end{aligned}$$

Invers Laplace-transformering ger nu att

$$y(t) = \left(0.5t + 0.25 - 0.25e^{-2t}\right) u(t)$$

vilket är det sökta stegsvaret. Notera att stegsvaret inte är begränsat (pga $0.5t$-termen), vilket beror på polen i origo!

4. (a) Vi önskar digitala brytfrekvenser $f_c = F_c/F_{samp} = 0.2$ och $f_s = F_s/F_{samp} = 0.3$. För att få det måste vi göra "pre-warping": $\Omega = (2/T)\tan(\omega/2)$. Det analoga filtret skall dimensioneras med brytfrekvenserna:

$$\begin{aligned} F_c' &= (F_{samp}/\pi)\tan(0.2\pi) \approx 116 \text{ Hz} \\ F_s' &= (F_{samp}/\pi)\tan(0.3\pi) \approx 219 \text{ Hz} \end{aligned}$$

(dvs $\Omega_c' \approx 727$ rad/s och $\Omega_s' \approx 1376$ rad/s).

(b) Vi behöver ha $|H(j\Omega_s')|_{dB} \leq -20$, vilket ger

$$\frac{1}{1 + (\Omega_s'/\Omega_c')^{2N}} \leq 0.01$$

Detta ger $N \geq 3.6$, välj $N = 4$!

(c) Polerna ges av

$$p_k = \Omega_c'\{e^{\pm j(5\pi/8)}, e^{\pm j(7\pi/8)}\}$$

vilket ger

$$p_k = \{-278 \pm 672j, -672 \pm 278j\}$$

(d) Överföringsfunktionen ges av

$$H_c(s) = \frac{K}{(s-p_1)\cdots(s-p_4)} = \cdots$$

där K bestäms så att $H_c(0) = 1$, vilket ger $K = \Omega_c'^4$.

(e) Det digitala filtret $H_d(z)$ fås sedan genom att byta ut s mot $1000\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ i $H_c(s)$.

5. (a) Frekvensfunktionen fås direkt från impulssvaret:

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \cdots + h[N]e^{-jN\omega}$$

(b) Eftersom $h[0] = -h[N],\ h[1] = -h[N-1], \ldots,\ h[(N-1)/2] = -h[(N+1)/2]$ (N är udda) så får vi

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h[0](1 - e^{-jN\omega}) + h[1](e^{-j\omega} - e^{-j(N-1)\omega}) + \cdots \\ &\quad + h\left[\frac{N-1}{2}\right](e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} - e^{-j\frac{N+1}{2}\omega}) \end{aligned}$$

Nu bryter vi ut $e^{-j(N/2)\omega}$ ur varje term för att kunna använda Eulers formler (baklänges):

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h[0]e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{N}{2}\omega} - e^{-j\frac{N}{2}\omega}) + h[1]e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{N-2}{2}\omega} - e^{-j\frac{N-2}{2}\omega}) \\ &\quad + \cdots + h\left[\frac{N-1}{2}\right] e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}) \\ &= e^{-j\frac{N}{2}\omega}\left\{h[0]2j\sin\frac{N}{2}\omega + h[1]2j\sin\frac{N-2}{2}\omega\right. \\ + \cdots &\quad \left. + h\left[\frac{N-1}{2}\right]2j\sin\frac{1}{2}\omega\right\} \end{aligned}$$

Eftersom $j = e^{j\pi/2}$ så kan vi skriva

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N}{2}\omega\right)}H_r(\omega)$$

där

$$H_r(\omega) = 2\left\{h[0]\sin\frac{N}{2}\omega + h[1]\sin\frac{N-2}{2}\omega + \cdots + h\left[\frac{N-1}{2}\right]\sin\frac{1}{2}\omega\right\}$$

är en reell funktion. Så snart $H_r(\omega) > 0$ (dvs säkert i passbandet) så gäller

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = \frac{\pi}{2} - \frac{N}{2}\omega$$

Fasen är alltså en linjär (eller affin, för att vara mer precis) funktion av ω.

(c) Grupplöptiden ges av

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \arg\{H(e^{j\omega})\}}{\partial\omega} = \frac{N}{2}$$

och är konstant. Det betyder att "vågpaket" får samma tidsfördröjning, oberoende av frekvens.