Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 16 augusti 2005, kl 8.30–12.30

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Joakim Gunnarsson, tel. 031 - 772 2140.

Betygslistan anslås senast den 29 augusti 2005 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 30 augusti 2005 kl 12.30-13.00 i E-huset, rum 6439.

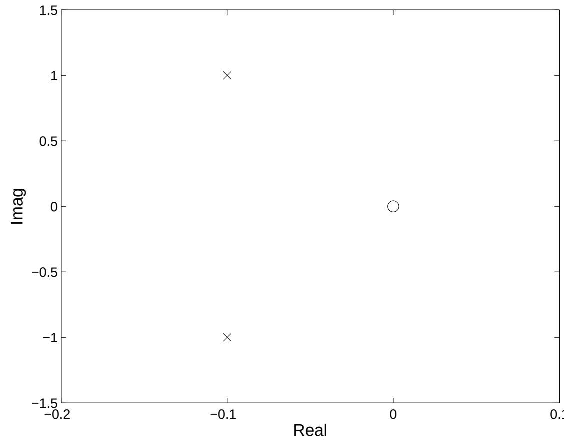
Tillåtna hjälpmedel:

- Valfri kalkylator
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar

OBS: Glöm ej tydligt skrivet namn och personnummer på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!

1. (a) Pol-nollställe-diagrammet för ett analogt filter visas i nedanstående figur. Skissa amplitud-karaktäristiken för filtret, samt avgör vilken typ av filter det är. (3p)



(b) Ett tidsdiskret LTI-system beskrivs av överföringsfunktionen $H(z)$. För en viss insignal $x[n]$ ges utsignalen $y[n]$ av

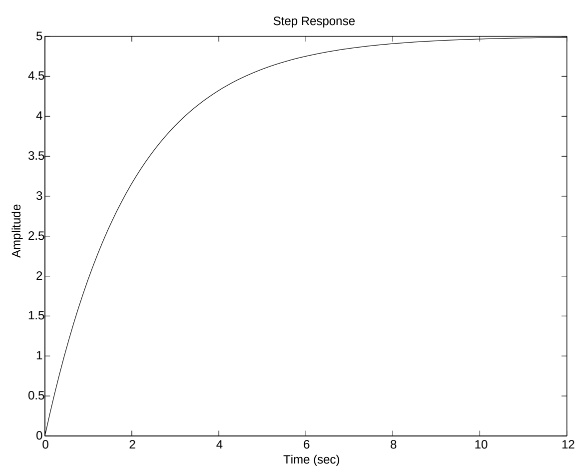
$$y_H[n] = 2e^{-n}\cos(\pi n/2)u[n]$$

där $u[n]$ är enhets-steget. Antag att samma insignal $x[n]$ istället appliceras på ett system med överföringsfunktionen $G(z) = (1-z^{-1})H(z)$. Bestäm den resulterande utsignalen $y_G[n]$! (3p)

(c) Ett tidskontinuerligt system beskrivs av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bx(t)$$

där $x(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal. Systemets stegsvar visas i figuren nedan:



Bestäm ungefärliga värden på konstanterna a och b! (4p)

2. (a) En tidskontinuerlig signal $x(t)$ passerar genom ett LP-filter $G(s)$ med följande frekvensfunktion

$$G(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| \leq 2000\pi \\ 0 & |\omega| > 2000\pi \end{cases}$$

Utsignalen från filtret samplas sedan med samplingstiden $T_s = 0.5$ ms. Den resulterande digitala signalen ges då av

$$x[n] = 2\cos(0.5n) - \sin(0.5n)$$

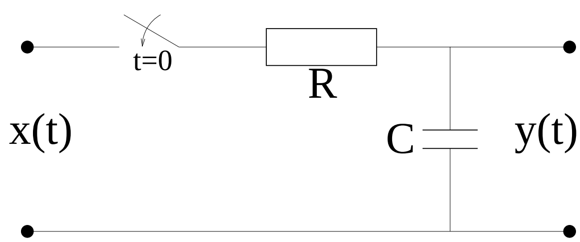
Ange ett uttryck för ursprungssignalen $x(t)$! Om flera alternativ är möjliga skall samtliga redovisas för full poäng! (5p)

(b) Ett digitalt LP-filter har impulssvaret

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Samplingsfrekvensen är 1 kHz. Bestäm filtrets 3-dB brytfrekvens f_c i Hz! (5p)

3. I nedanstående krets ges inspänningen av $x(t) = \cos t$. Kretsen befinner sig i vila då strömbrytaren plötsligt sluts vid tiden $t = 0$.



(a) Bestäm överföringsfunktionen från x till y (sluten strömbrytare). (3p)

(b) Ange ett uttryck för utsignalen $y(t)$, $t \geq 0$, och skissa hur signalen varierar över tiden (endast stationär lösning ger 3 p). (7p)

4. Man önskar dimensionera ett lågpassfilter med 3 dB gränsfrekvens $f_c = 1000$ Hz. DC-förstärkningen skall vara 3 dB. Filtrets amplitudkaraktäristik skall vara av Butterworth-typ:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2N}} \qquad \text{(normaliserat filter)}$$

(a) Bestäm filtrets gradtal N så att dämpningen vid fs = 2000 Hz är minst 20 dB. (2p)

(b) Ange en överföringsfunktion $H(s)$ som uppfyller ovanstående specifikationer. (6p)

(c) Hur skall designmetoden modifieras om man istället önskar ett högpassfilter med samma brytfrekvens? (2p)

5. Ett vanligt problem inom signalbehandling är att bestämma frekvensinnehållet hos en mätsignal. Det är då ofta viktigt att frekvensupplösningen är tillräcklig, så att närliggande spektraltoppar inte "flyter ihop". I spektralanalys med modifierat (fönstrat) periodogram uppskattas frekvensinnehållet enligt

$$\begin{aligned} P_x(\omega) &= |X(\omega)|^2 \\ X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

där $w[n]$ är fönsterfunktionen och N fönsterlängden. Frekvensupplösningen ges då av fönsterbredden i frekvensplanet. Denna är ofta svårt att beräkna exakt, och i denna uppgift skall en approximativ formel härledas.

(a) Låt $P_\omega(\omega) = |W(\omega)|^2$ vara fönstrets periodogram, där

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]e^{-j\omega n}$$

Visa att enkelsidiga 3 dB bandbredden hos $P_\omega(\omega)$ för stora N (dvs litet ω_{3dB}) ges av

$$\omega_{3dB} \approx \sqrt{-\frac{P_\omega(0)}{P''_\omega(0)}}$$

(6p)

(b) Använd ovanstående formel för att approximativt bestämma frekvensupplösningen hos rektangelfönstret. (4p)

Lösningsförslag/svar till Tentamen i ESS 010 Signaler och System E3 16 augusti 2005

1. (a) Systemet har ett nollställe i $s = 0$ och poler i $s = -0.1 \pm j$. Sätt $s = j\omega$ och låt ω gå från 0 till ∞. Nollstället bidrager med $|j\omega| = \omega$ i täljaren, och polerna med $|j\omega + 0.1 + j|^2$ i nämnaren. Amplituden är därför liten för små och stora ω, och har en topp kring $\omega = 1$. Filtret är alltså av bandpass-karaktär.

   (b) Observera att $G(z) = H(z) - z^{-1}H(z)$, och att z^{-1} motsvarar en tidsfördröjning med ett sampel. Den nya utsignalen blir alltså

$$y_G[n] = y_H[n] - y_H[n-1] = 2e^{-n}\cos(\pi n/2)u[n] \\ -2e^{-(n-1)}\cos(\pi(n-1)/2)u[n-1]$$

   (c) Laplace-transformera först differentialekvationen för att ta fram överföringsfunktionen:

$$sY(s) + aY(s) = bX(s) \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a}$$

   Stegsvaret till systemet fås ur en Laplace-tabell till

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{b}{s+a}\right\} = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)u(t)$$

   Slutvärdet ($t \to \infty$) är alltså b/a, vilket enligt figuren är 5. Stigtiden (den tidpunkt då stegsvaret har nått $(1/e) \times 100$ procent av slutvärdet) är $1/a$, vilket enligt figur fås till ca 2. Alltså är $a = 0.5$ och $b = 2.5$.

2. (a) Samplingsfrekvensen är $\omega_s = 2\pi/T_s = 4000\pi$ rad/s. Nyqvistfrekvensen är alltså 2000π rad/s, vilket är samma som det givna antivikningsfiltrets brytfrekvens. Därför sker ingen aliasing vid samplingen. Däremot sker en tidsfördröjning, pga filtrets fasgång. Fasen $\Phi(\omega) = -j\omega$ rad

motsvarar en tidsfördröjning med $\tau = 1$ s. Ursprungssignalen måste alltså ha haft en komponent enligt

$$x(t) = 2\cos(\omega_0(t+1)) - \sin(\omega_0(t+1)),$$

där $\omega_0 = 0.5/Ts = 1000$ rad/s. Observera att $x(t)$ även kan ha haft signalkomponenter i frekvensområdet över 2000π rad/s!

(b) Fourier-transformera för att få frekvensfunktionen:

$$H(e^{j\Omega}) = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}$$

DC-förstärkningen är $|H(1)| = 3$, dvs vi söker Ω_c så att $|H(e^{j\Omega_c})| = 3/\sqrt{2}$. Skriv om $H(e^{j\Omega})$ som

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega}\left(e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}\right) = e^{-j\Omega}(1 + 2\cos\Omega)$$

Alltså är

$$|H(e^{j\Omega})| = |1 + 2\cos\Omega|$$

och vi får

$$1 + 2\cos\Omega_c = 3/\sqrt{2}$$

vilket ger $\Omega_c \approx 0.9756$. I Hz blir detta

$$f_c = \frac{\Omega_c}{2\pi} f_s \approx 155 \text{ Hz}$$

3. (a) Ersätt R och C med operatorimpedanserna $Z_R = R$ och $Z_C = 1/(sC)$. Spänningsdelning ger sedan att

$$Y(s) = \frac{Z_c}{Z_R + Z_c} X(s) = \frac{1}{RCs + 1} X(s)$$

Överföringsfunktionen är alltså $H(s) = 1/(RCs + 1)$.

(b) Insignalen har Laplace-transformen $X(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Partialbråksuppdela utsignalen:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(RCs+1)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{D}{RCs + 1}$$

Identifiering av koefficienterna ger att

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + R^2C^2} \\ B &= RCA \\ D &= -B \end{aligned}$$

Inverstransformering av $Y(s)$ ger till slut att utsignalen blir

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + Ae^{-(1/RC)t}, \; t \geq 0$$

Detta är en sinus-signal med en transient (den startar ju från vila).

4. (a) Eftersom $f_s/f_c = 2$ så skall N väljas så att det normaliserade filtret ger 20 dB dämpning vid $\omega = 2$:

$$|H(j2)|^2 = \frac{1}{1+2^{2N}} \leq 0.01$$

Vi får $2^{2N} \geq 99$, vilket kräver $N = 4$.

(b) Polerna ges av

$$s = \omega_c \times \{e^{\pm j5\pi/8},\, e^{\pm j7\pi/8}\}$$

där $\omega_c = 2000\pi$. Slå ihop parvis:

$$\begin{aligned}(s-\omega_c e^{j5\pi/8})(s-\omega_c e^{-j5\pi/8}) &\approx s^2 + 4809s + 3.9478\,10^7 \\ (s-\omega_c e^{j7\pi/8})(s-\omega_c e^{-j7\pi/8}) &\approx s^2 + 11610s + 3.9478\,10^7\end{aligned}$$

Med observationen att DC-förstärkningen skall vara 3 dB blir den sökta överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{(s^2 + 4809s + 3.9478\,10^7)(s^2 + 11610s + 3.9478\,10^7)}$$

där $K = \omega_c^N\, 10^{3/20} \approx 2.2015\, 10^{15}$.

(c) Man gör en LP->HP transform, vilket innebär att man sätter $s = 1/s$. Detta får till följd att frekvensaxeln inverteras, så att ett LP-filter övergår i ett HP-dito.

5. (a) Vi söker ω_{3dB} så att $P_\omega(\omega_{3dB}) = P_\omega(0)/2$. Iden är att approximera $P_\omega(\omega)$ för små ω med en Taylor-utveckling kring $\omega = 0$:

$$P_\omega(\omega) \approx P_\omega(0) + P_\omega^{'}(0)\omega + \frac{1}{2}P_\omega^{''}(0)\omega^2$$

Eftersom spektret har en topp vid $\omega = 0$ (förutsatt att $w[n]$ är symmetriskt) så är $P_\omega(0)^{'} = 0$. Vi får alltså ekvationen

$$P_\omega(0)/2 = P_\omega(\omega_{3dB}) \approx P_\omega(0) + \frac{1}{2}P_\omega^{''}(0)\omega_{3dB}^2$$

Lös ut ω_{3dB}, vilket ger

$$\omega_{3dB} \approx \sqrt{-\frac{P_\omega(0)}{P_\omega^{''}(0)}}$$

Notera att $P_\omega^{''}(0) < 0$, eftersom spektret har en topp i $\omega = 0$. I originaltesen blev det ett tryckfel, varför ovanstående inte stämmer med formeln i uppgiften.

(b) För rektangelfönstret gäller $w[n] = 1, \; n = 0, \ldots, N-1$. Frekvensfunktionen och dess derivator blir då:

$$
\begin{aligned}
W(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}\,, \quad W(0) = N \\
W'(\omega) &= -j\sum_{n=0}^{N-1} n e^{-j\omega n}\,, \quad W'(0) \approx -jN^2/2 \\
W''(\omega) &= -\sum_{n=0}^{N-1} n^2 e^{-j\omega n}\,, \quad W''(0) \approx -N^3/3
\end{aligned}
$$

Nu måste vi uttrycka $P_\omega(0)''$ i termer av ovanstående:

$$
\begin{aligned}
P_\omega(\omega) &= |W(\omega)|^2 = W(\omega)\bar{W}(\omega)\,, \quad P_\omega(0) = N^2 \\
P_\omega'(\omega) &= W'(\omega)\bar{W}(\omega) + W(\omega)\bar{W}'(\omega) = 2\Re\{W'(\omega)\bar{W}(\omega)\} \\
P_\omega''(\omega) &= 2\Re\{W''(\omega)\bar{W}(\omega) + |W'(\omega)|^2\} \\
P_\omega''(0) &\approx 2\Re\{(-N^3/3)(N) + N^4/4\} = -N^4/6
\end{aligned}
$$

Slutligen fås den approximativa 3dB-bandbredden till

$$
\omega_{3dB} \approx \sqrt{-\frac{P_\omega(0)}{P_\omega''(0)}} \approx \sqrt{\frac{N^2}{N^4/6}} = \sqrt{6}/N
$$

Detta är en ganska dålig approximation. Skälet är att ovanstående Taylorutveckling konvergerar långsamt, och fler termer bör tas med, men då blir det förstås svårare att lösa ut ω_{3dB}!