

Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 31 mars 2005, kl 8.30–12.30

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Mats Viberg, tel. 031 - 772 1773.

Betygslistan anslås senast den 13 april 2005 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 14 april 2005 kl 12.30-13.00 i E-huset, rum 6439.

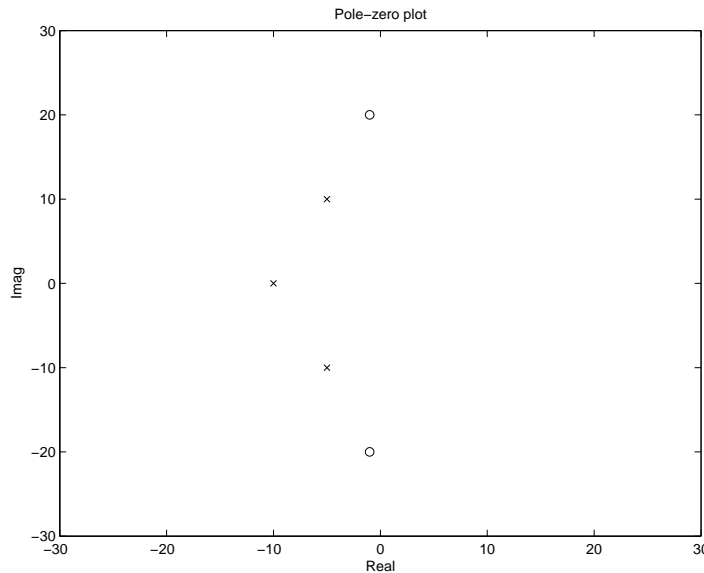
Tillåtna hjälpmedel:

- Valfri kalkylator
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar

OBS: Glöm ej tydligt skrivet namn och personnummer på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!

1. (a) Pol-nollställe-diagrammet för ett analogt filter visas i nedanstående figur. Avgör om filtret är av i) LP, ii) HP, iii) BP, eller iv) BS karaktär! Motivera ditt val. (3p)



- (b) Ett tidsdiskret LTI-system beskrivs av överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Systemet matas med följande insignal:

$$x[n] = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Bestäm den resulterande utsignalen $y[n]$! (3p)

- (c) En komplex-värd digital signal ges av

$$x[n] = Ce^{j\Omega n}$$

där $C = Ae^{j\phi}$ är den komplexa amplituden. En 8-punkters FFT av $\{x[n]\}_{n=0}^7$ resulterar i:

$$\{X(k)\}_{k=0}^7 = \{-0.6 + 0.1j, -1.1 - 0.2j, 9.6 + 5.7j, 0.6 + 0.8j, 0.1 + 0.5j, -0.1 + 0.4j, -0.2 + 0.3j, -0.3 + 0.3j\}$$

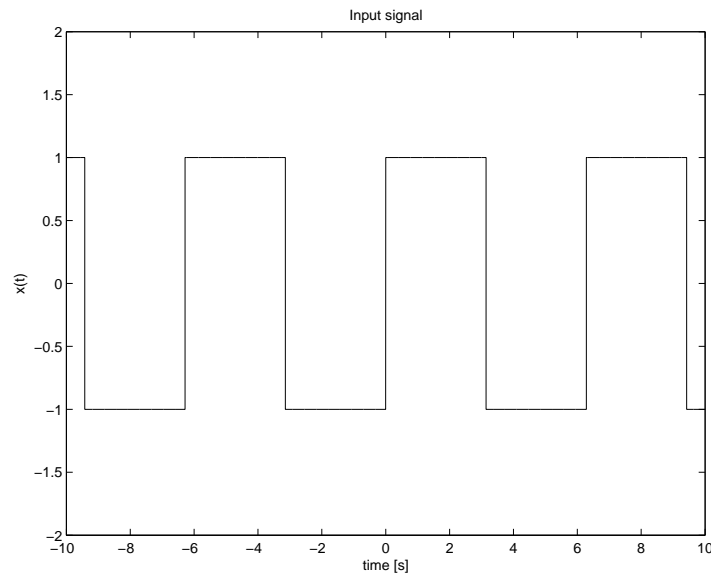
Bestäm ungefärliga värden på Ω och C ! (4p)

2. (a) Man önskar dimensionera ett analogt Butterworth-filter med gränshfrekvens (3 dB) 100 Hz. Vid frekvensen 200 Hz skall filtret ha minst 30 dB dämpning. DC-förstärkningen skall vara 10 dB. Bestäm nödvändigt gradtal för att uppfylla dessa specifikationer! (5p)

- (b) Nedanstående tidskontinuerliga signal $x(t)$ är insignalen till ett system som beskrivs av sambandet

$$\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

Bestäm utsignalen $y(t)$! (5p)



3. Ett analogt filter har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 100s + 10^4}$$

Filtret befinner sig i vila vid $t = 0$, då följande insignal appliceras:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

Bestäm den resulterande utsignalen $y(t)$! (10p)

4. I detta problem skall du dimensionera ett digitalt FIR-filter med fönstringsmetoden. Detta görs genom följande steg:

- (a) Bestäm impulssvaret till ett idealt digitalt bandpassfilter med bryt-frekvenser $f_{p1} = 100$ Hz respektive $f_{p2} = 200$ Hz. Samplingsfrekvensen är 1 kHz. (6p)
- (b) Överför filtret i a) till ett kausalt FIR-filter med $M = 9$ koefficienter genom fönstring och tidsfördröjning. Använd ett triangulärt fönster. Svara med en formel för hur filter-koefficienterna skall beräknas (numeriska värden behöver ej ges). (4p)

5. En tidskontinuerlig signal $x(t)$ ges av

$$x(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty$$

Signalen samplas först med samplingsfrekvensen $f_s = 10$ Hz. Den digitala signalen $x[n]$ omvandlas sedan åter till en analog signal $\hat{x}(t)$ med Zero-Order-Hold (ZOH) interpolation. Bestäm Fouriertransformen $\hat{X}(j\omega)$ för $\hat{x}(t)$, och jämför med originalet $X(j\omega)$. Eventuell kvantiseringsdistortion i omvandlingarna försummas. (10p)

Lösningförslag till tentamen i ESS 010, Signaler och System E3, 31 Mars 2005.

14 april 2005

1. (a) Vi ser att filtret har tre poler, markerade med x i figuren, och två nollställen, markerade med o . För att kunna förstå hur deras placering inverkar på filtrets karaktären skriver vi först ned överföringsfunktionen

$$H(s) = K \frac{(s - n_1)(s - n_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}. \quad (1)$$

Frekvenssvaret får vi från överföringsfunktionen genom substitutionen $s = j\omega$, och från dess absolutbelopp kan vi sedan dra slutsatser om filtrets frekvenskaraktär

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{|j\omega - n_1||j\omega - n_2|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2||j\omega - p_3|}. \quad (2)$$

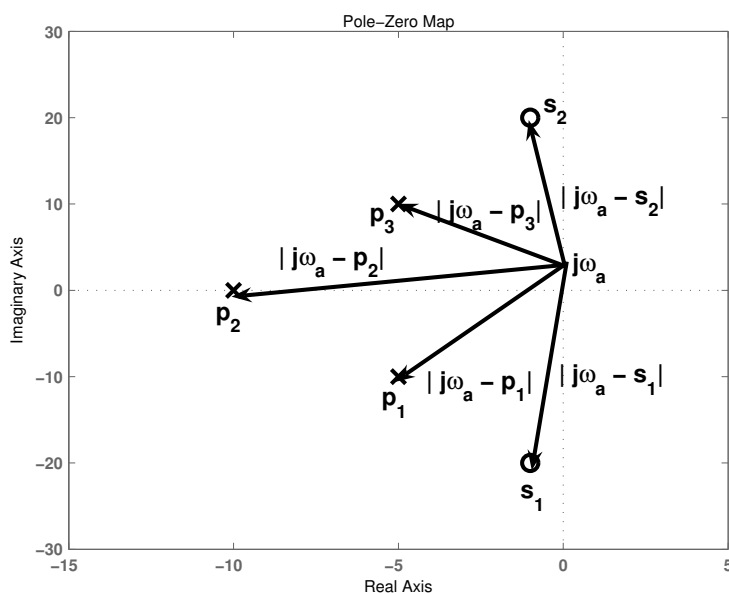
Vad vi nu vill veta är hur $|H(j\omega)|$ förändras när vi låter ω växa upp längs $j\omega$ -axeln.

Så länge alla poler ligger i vänster halvplan är det svårt att dra några slutsatser om filtrets egenskaper utifrån enskilda poler eller nollställens position. Det är hur de ligger i förhållande till varandra som är avgörande. Genom att tolka de olika faktorerna i ekvation (2) som vektorer i s -planet är det ganska enkelt att lista ut filtrets beteende. Ta en av faktorerna i täljaren som exempel

$$|j\omega - n_2|. \quad (3)$$

Denna kan tolkas som avståndet från en godtycklig punkt på frekvensaxeln ($j\omega$) till nollstället n_2 . På samma sätt kan vi tolka de andra faktorerna i $|H(j\omega)|$. Genom att öka frekvensen, dvs

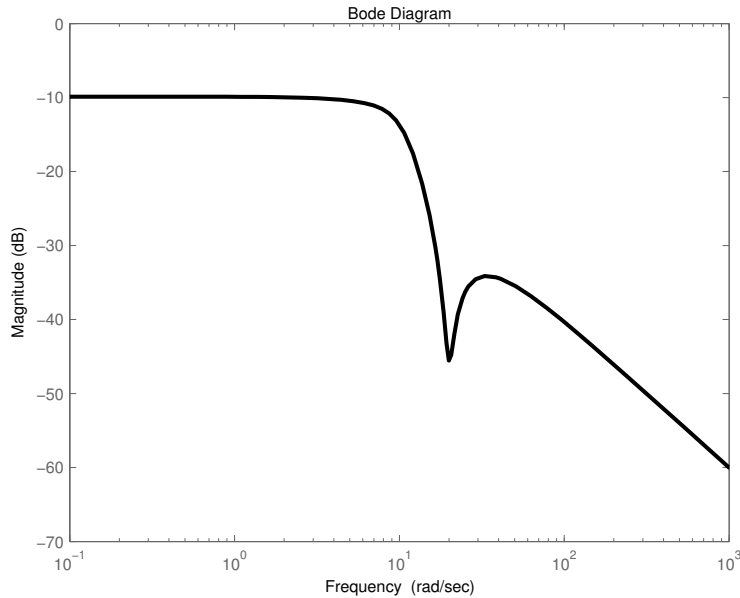
vandra upp längs $j\omega$ -axeln, ser vi hur dessa avstånd ändras och därmed också den totala produkten. Figur 1 åskådliggör detta genom att rita ut de olika faktorerna för en viss frekvens ω_a .



Figur 1:

Nu kan vi analysera filtret som var givet i uppgiften. På grund av symmetrin kring real-axeln kan vi starta i $j\omega = 0$ och vandra uppåt längs imaginäraxeln. När vi gör så märker vi att avståndet till de två nedre polerna och det nedre nollstället ökar medan avståndet till den övre polen och det övre nollstället ökar. Eftersom vi skall multiplicera avstånden till nollställena och dividera med avstånden till polerna, se ekvation (2), borde $|H(j\omega)|$ avta för ökande ω . När vi sedan har passerat den övre polen ser vi att avståndet till alla polerna ökar med växande ω vilket ytterligare förstärker dämpningen. Det övre nollstället bidrar också till dämpningen eftersom när vi passerar denna är avståndet till det litet vilket innebär att en av faktorerna i täljaren i ekvation (2) blir liten. För väldigt höga frekvenser blir avstånden till polerna och nollställena ungefär lika stora vilket innebär en att $|H(j\omega)|$ asymptotiskt avtar som $1/\omega$. Följaktligen borde de givna filtret

vara av lågpasskaraktär. I figur 2 visas frekvenssvaret för det givna filtret.



Figur 2:

(b) Vi vet att utsignalens Z-transform, $Y(z)$, kan skrivas som

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (4)$$

och $X(z)$ kan vi få fram som

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 2z^{-1}. \quad (5)$$

Om vi kombinerar dessa ekvationer får vi relationen

$$Y(z) = 2z^{-1}H(z) \quad \rightarrow \quad y[n] = 2h[n-1], \quad (6)$$

där $h[n]$ är systemets impulssvar. Detta fås genom att inverstransformera överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}} \\ &= \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}} + \frac{0.5z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Detta uttryck påminner om Z -transformen hos följande transformpar, vilka fås från lämplig tabell

$$\begin{aligned}\alpha^n \cos(\Omega_0 n) u[n] &\supset \frac{1 - \alpha \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\Omega_0) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} \\ \alpha^n \sin(\Omega_0 n) u[n] &\supset \frac{\alpha \sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\Omega_0) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}},\end{aligned}\quad (8)$$

och följande ansats kan skrivas ned

$$\begin{aligned}\frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}} &= \frac{1 - \alpha \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\Omega_0) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} \\ \frac{0.5z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}} &= \frac{\alpha \sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\Omega_0) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}.\end{aligned}\quad (9)$$

För att dessa ekvationer skall gälla måste α och Ω_0 uppfylla följande

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{1}{2} \\ \alpha \cos(\Omega_0) &= -\frac{1}{2} \\ \alpha \sin(\Omega_0) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad (10)$$

En möjlig lösning är

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Omega_0 &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}\quad (11)$$

Slutligen kan vi skriva impulssvaret som

$$h[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) u[n] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) u[n], \quad (12)$$

och systemets utsignal som

$$\begin{aligned}y[n] &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cos\left(\frac{3\pi}{4}(n-1)\right) u[n-1] \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{3\pi}{4}(n-1)\right) u[n-1].\end{aligned}\quad (13)$$

(c) En signals DFT och IDFT definieras med följande ekvationer

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (14)$$

Den givna signalen var

$$x[n] = C e^{j\Omega n}, \quad (15)$$

vilket innebär att dess DFT får formen

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C e^{jn(\frac{2\pi k}{N} - \Omega)}. \quad (16)$$

Från ovanstående relation kan vi förstå att $|X[k]|$ får sitt max då $\frac{2\pi k}{N} - \Omega$ är så litet som möjligt. Om vi studerar de givna DFT punkterna har beloppet av dessa sitt max för $k = 2$, vilket innebär att följande skattning är rimlig

$$\Omega \approx \frac{2\pi \cdot 2}{8} = \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Den komplexa amplituden C kan räknas ut exakt från IDFT-relationen eftersom för $n = 0$ gäller

$$\begin{aligned} x[0] &= C e^{j\Omega \cdot 0} = C \\ x[0] &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j \frac{2\pi \cdot 0 \cdot k}{8}} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k]. \end{aligned} \quad (18)$$

Vi kan alltså räkna ut C exakt som medelvärdet hos de givna DFT punkterna, vilket leder till

$$C = 1 + 0.99j. \quad (19)$$

2. (a) Den normaliserade Butterworth karakteristiken ges av följande ekvation

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}, \quad (20)$$

där ω_c är filtrets gränshfrekvens. Vi vill att dämpningen skall vara 30 dB vid $\omega_2 = 400\pi$ rad/s, vilket i linjär skala motsvarar $|H(j\omega_2)| = 10^{-3/2}$ eftersom

$$20 \log_{10}(|H(j\omega_2)|) = -30 \Leftrightarrow |H(j\omega_2)|^2 = 10^{-3}. \quad (21)$$

Filtrets gränshfrekvens var given till $\omega_c = 200\pi$ rad/s, vilket leder till följande ekvation

$$\frac{1}{1 + 2^{2N}} \leq 10^{-3} \Rightarrow 999 \leq 2^{2N} \Rightarrow N = 5. \quad (22)$$

(b) Uppgifter av den här typen löses enklast genom att utnyttja följande:

- sinusar är egenfunktioner till LTI-system
- periodiska signaler kan skrivas som en summa av sinusar.

Ett första steg är att ta fram systemets överföringsfunktion genom att Laplacetransformera den givna differentialekvationen

$$sY(s) + Y(s) = X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + 1}. \quad (23)$$

Att sinusar är egenfunktioner till LTI-system innebär att om insignalen är en sinus, t ex

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t), \quad (24)$$

tar utsignalen formen

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(j\omega_0)| A_0 \sin(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0^2}} A_0 \sin(\omega_0 t - \arctan(\omega_0)), \end{aligned} \quad (25)$$

dvs endast amplituden och fasen hos insignalen har påverkats.

Den givna insignalen i uppgiften var inte en sinus, men dock en periodisk signal. Alltså kan vi Fourierseriutveckla insignalen, dvs skriva den som en summa av sinusar på formen

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\omega_0 t), \quad (26)$$

eller på komplex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (27)$$

I ekvationerna ovan motsvarar ω_0 signalens *grundfrekvens* och fås som $\omega_0 = 2\pi/T_0$, där T_0 är den givna signalens periodtid. Fourierkoefficienterna C_k räknas ut med hjälp av ekvationen

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad (28)$$

eller slås upp i lämplig tabell. Här väljer vi att räkna ut dem.

Från den givna figuren är det svårt att uppskatta signalens periodtid exakt, den verkar vara lite drygt 6 s. Vi kan dock räkna på den utan att stoppa in något värde. Från ekvation (28) har vi

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T_0} t}}{-jk\frac{2\pi}{T_0}} \right]_0^{T_0/2} - \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T_0} t}}{-jk\frac{2\pi}{T_0}} \right]_{T_0/2}^{T_0} \\ &= \frac{1}{jk2\pi} \left(\left[e^{-jk\frac{2\pi}{T_0} t} \right]_{T_0/2}^{T_0} - \left[e^{-jk\frac{2\pi}{T_0} t} \right]_0^{T_0/2} \right) \\ &= \frac{1}{jk2\pi} (e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi} - e^{-jk\pi} + 1) \\ &= \frac{1}{jk\pi} (1 - (-1)^k) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{jk\pi}, & k \text{ udda} \\ 0, & k \text{ jämna.} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Om vi nu återgår till ekvation (27) kan vi skriva $x(t)$ som

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = [C_k = C_{-k}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} - C_k e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k 2j \sin(k\omega_0 t) \\ &= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} \frac{4}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

För att slutligen skriva ned utsignalen utnyttjar vi ekvation (25)

samt superpositionsprincipen, vilket leder till

$$y(t) = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} \frac{4}{k\pi\sqrt{1+(k\omega_0)^2}} \sin(k\omega_0 t - \arctan(k\omega_0)). \quad (31)$$

3. Lösningen fås genom att bilda Laplacetransformen, $X(s)$, av insignalen och multiplicera denna med överföringsfunktionen vilket resulterar i utsignalens Laplacetransform

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (32)$$

Utsignalen fås sedan genom att inverstransformera $Y(s)$.

Insignalen kan skrivas som

$$x(t) = u(t) - u(t-1), \quad (33)$$

där $u(t)$ är stegfunktionen. Insignalens Laplacetransform fås sedan till

$$X(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \quad (34)$$

vilket resulterar i

$$Y(s) = \frac{s+10}{s^2+100s+10^4} \frac{1-e^{-s}}{s}. \quad (35)$$

För att inverstransformera $Y(s)$ börjar vi med följande partialbråksuppdelning

$$\frac{s+10}{(s^2+100s+10^4)s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+100s+10^4}. \quad (36)$$

Konstanterna A, B, C bestäms från

$$As^2 + 100As + A10^4 + Bs^2 + Cs = s + 10 \Rightarrow \begin{cases} A = 10^{-3} \\ B = -10^{-3} \\ C = 0.9. \end{cases} \quad (37)$$

Vi kan nu skriva $Y(s)$ som

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(\frac{10^{-3}}{s} + \frac{10^{-3}s + 0.9}{s^2 + 100s + 10^4} \right) (1 - e^{-s}) \\ &= Y_1(s)(1 - e^{-s}), \end{aligned} \quad (38)$$

vilket innebär att

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - 1). \quad (39)$$

Återstår att inverstransformera $Y_1(s)$

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{10^{-3}}{s} - 10^{-3} \frac{s - 900}{(s + 50)^2 + 7500} \\ &= \frac{10^{-3}}{s} - 10^{-3} \left(\frac{s + 50}{(s + 50)^2 + 7500} - \frac{950}{(s + 50)^2 + 7500} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Från lämplig tabell kan vi nu slå upp inverstransformen till $Y_1(s)$

$$y_1(t) = 10^{-3} \left(1 - e^{-50t} \cos(50\sqrt{3}t) - \frac{950}{50\sqrt{3}} e^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t) \right) u(t), \quad (41)$$

och slutligen får vi utsignalen $y(t)$ till

$$\begin{aligned} y(t) &= 10^{-3} \left(1 - e^{-50t} \cos(50\sqrt{3}t) - \frac{950}{50\sqrt{3}} e^{-50t} \sin(50\sqrt{3}t) \right) u(t) \\ &\quad - 10^{-3} \left(1 - e^{-50(t-1)} \cos(50\sqrt{3}(t-1)) - \frac{950}{50\sqrt{3}} e^{-50(t-1)} \sin(50\sqrt{3}(t-1)) \right) u(t-1). \end{aligned} \quad (42)$$

4. (a) Uppgiften var att konstruera ett digitalt filter och vi börjar med att konvertera de analoga brytfrekvenserna f_{p1} , f_{p2} till digitala motsvarigheter.

$$\begin{aligned} \omega_{p1} = 2\pi f_{p1} &\Rightarrow \Omega_{p1} = \omega_{p1} T_s \\ \omega_{p2} = 2\pi f_{p2} &\Rightarrow \Omega_{p2} = \omega_{p2} T_s, \end{aligned} \quad (43)$$

där T_s är tiden mellan varje sampling. Med givna värden får vi

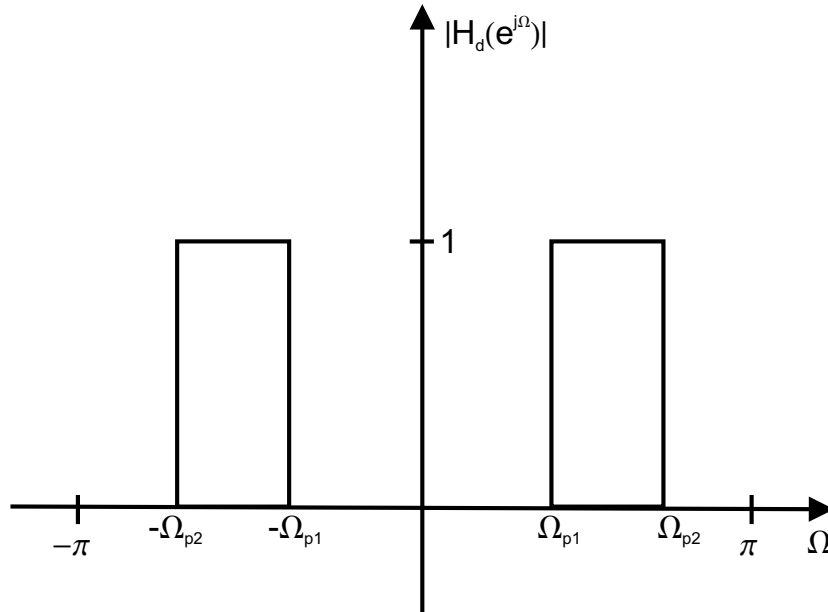
$$\Omega_{p1} = 0.2\pi, \quad \Omega_{p2} = 0.4\pi. \quad (44)$$

Ett idealt bandpassfilter har specifikationen

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & \Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2} \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \quad (45)$$

vilket är symmetriskt för negativa frekvenser, se figur 3. Filtrets impulssvar får vi med hjälp av en invers DTFT på den ideala filterspecifikationen. En invers DTFT ges av

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (46)$$



Figur 3: Idealt bandpassfilter.

där vi skall integrera över ett godtyckligt intervall av längd 2π . Om vi väljer intervallet $\{-\pi, \pi\}$ tar ekvationen ovan formen

$$\begin{aligned}
 h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{p2}}^{-\Omega_{p1}} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{p1}}^{\Omega_{p2}} e^{j\Omega n} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{j\Omega n}}{jn} \right]_{-\Omega_{p2}}^{-\Omega_{p1}} + \left[\frac{e^{j\Omega n}}{jn} \right]_{\Omega_{p1}}^{\Omega_{p2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi jn} (e^{-j\Omega_{p1}n} - e^{-j\Omega_{p2}n} + e^{j\Omega_{p2}n} - e^{j\Omega_{p1}n}) \\
 &= \frac{1}{\pi n} (\sin(\Omega_{p2}n) - \sin(\Omega_{p1}n)).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Gränsvärdet för $n = 0$ kan vi räkna ut, eller slå upp, till $h_d[0] = \frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{\pi}$.

- (b) För att kunna implementera filtret från föregående uppgift vill man överföra det till ett kausalt FIR-filter, dvs ett filter vars impulssvar uppfyller

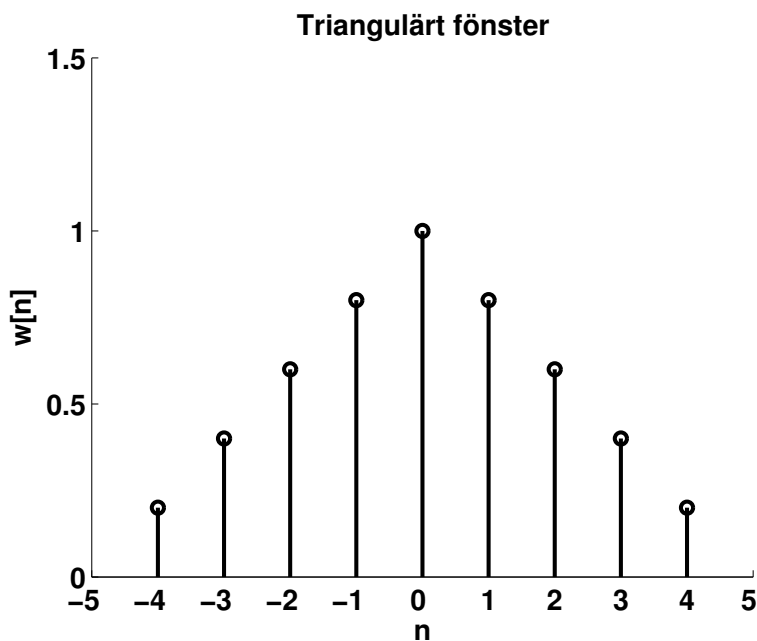
$$h[n] = 0, \quad n < 0. \tag{48}$$

Genom att tidsfördröja ett icke-kausalt filter kan man således

överföra det till ett kausalt filter, under förutsättning att dess impulssvar är tidsbegränsat. Eftersom det ideala filtrets impulssvar gavs av

$$h_d[n] = \frac{1}{\pi n} (\sin(\Omega_{p2}n) - \sin(\Omega_{p1}n)), \quad (49)$$

måste vi först trunkera det innan vi kan tidsfördröja det. Enligt uppgift skulle vi använda oss av ett triangulärt fönster, $w[n]$, vilket visas i figur 4. En funktion som beskriver $w[n]$ ges av



Figur 4:

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{5} & -4 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (50)$$

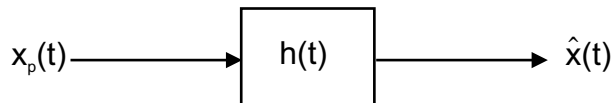
Notera att produkten $h_d[n]w[n]$, är nu tidsbegränsad och för att generera vårt kausala filter tidsfördröjer vi den 4 steg vilket leder till

$$h[n] = h_d[n - 4]w[n - 4], \quad n = 0, \dots, 8. \quad (51)$$

5. Fouriertransformen för den givna signalen har formen av en låda

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \quad (52)$$

jämför med det ideala filtret vi räknade ut i en tidigare uppgift. Den givna signalen är alltså bandbegränsad till $|f| = 1$ Hz, vilket innebär att ingen vinkning inträffar då signalen samplas med en frekvens på $f_s = 10$ Hz. Zero-Order-Hold interpolationen beskrivs med blockschemat i figur 5, där den kontinuerliga signalen $x_p(t)$ definieras enligt



Figur 5:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT), \quad (53)$$

och impulssvaret $h(t)$ definieras som

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \quad (54)$$

I frekvensplanet har vi då

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)), \quad \omega_s = 2\pi/T = 20\pi \\ &= \begin{cases} 1/T, & k\omega_s - 2\pi \leq \omega \leq k\omega_s + 2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

och

$$H(j\omega) = \int_0^T e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^T = e^{-j\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}, \quad (56)$$

vilket leder till

$$\begin{aligned} \hat{X}(j\omega) &= X_p(j\omega)H(j\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{T} e^{-j\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2} & k\omega_s - 2\pi \leq \omega \leq k\omega_s + 2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

I figur 6 visas absolutbeloppet av de olika Fouriertransformerna och vi ser att den rekonstruerade signalen är en någorlunda god approximation till den ursprungliga, men den innehåller en del oönskad energi för högre frekvenser. Dessa skulle kunna filtreras bort för att få en bättre rekonstruerad signal.

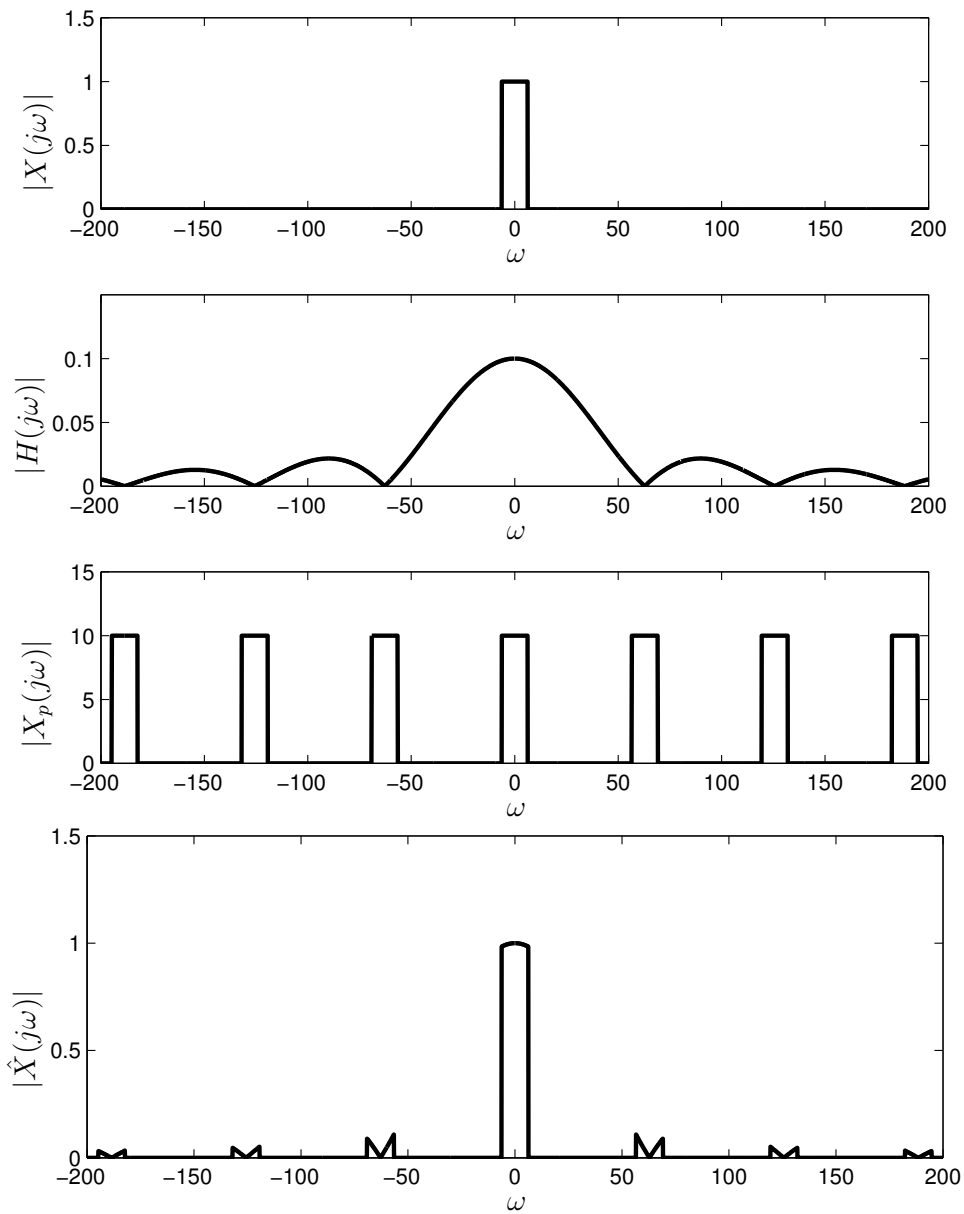


Figure 6: