Tentamen i
ESS 010 Signaler och System E3
V-sektionen, 13 december 2004, kl 14.00–18.00

Examinator: Mats Viberg

Tentamen består av 5 uppgifter som vardera ger maximalt 10 p. För godkänd tentamen fordras ca 20 poäng. I lösningarna till uppgifterna 3-5 skall **samtliga** steg (utom triviala beräkningar) redovisas.

Ansvarig under tentamen: Mats Viberg, tel. 031 - 772 1773.

Betygslistan anslås senast den 17 januari 2005 på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning får ske den 20 januari 2005 kl 12.30-13.30 i E-huset, rum 6439.

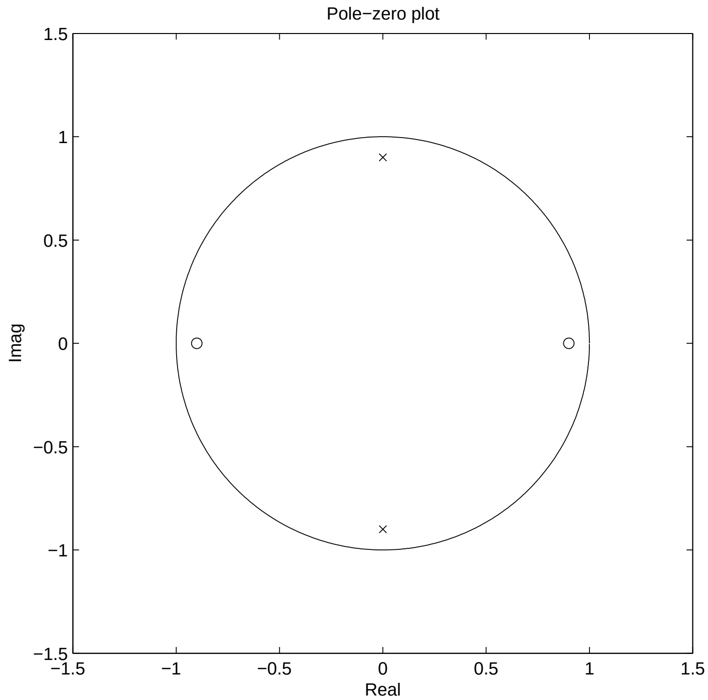
Tillåtna hjälpmedel:

- Valfri kalkylator
- Formelsamling: Signaler och System E3
- Tabellverk (Beta, Standard Mathematical Tables o dyl)
- En A4-sida egna anteckningar

OBS: Glöm ej tydligt skrivet namn och personnummer på varje sida samt noteringarna på försättsbladet.

Lycka till!

1. (a) Pol-nollställe-diagrammet för ett digitalt IIR-filter visas i nedanstående figur. Avgör om filtret är av i) LP, ii) HP, iii) BP, eller iv) BS karaktär! Motivera ditt val. (3p)



(b) Ett massa upphängd i en fjäder med dämpare beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = F(t)$$

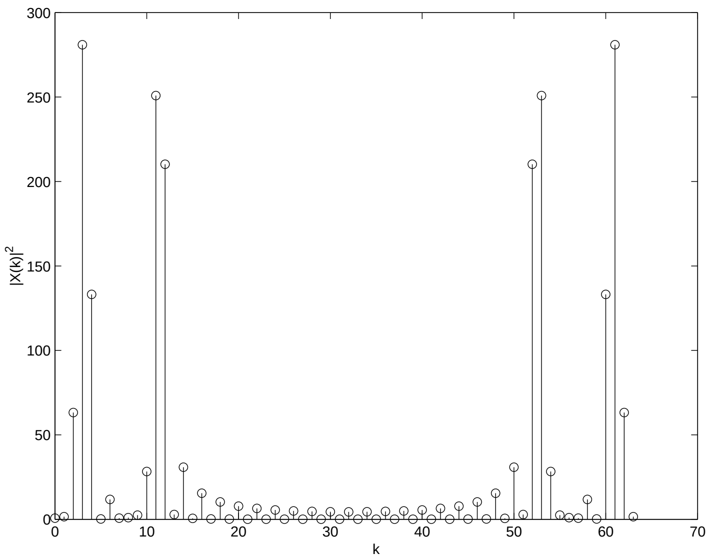
Här betecknar $x(t)$ massans läge och $F(t)$ är den pålagda yttre kraften. Antag att $F(t)$ varierar som $F(t) = \cos 4\pi t$. Bestäm $x(t)$ i stationärt tillstånd. (3p)

(c) Signalen $x(t) = 3 \sin 10\pi t$ samplas med samplingsfrekvensen $F_s = 8$ Hz. Den samplade signalen omvandlas sedan åter till en tids-kontinuerlig signal $y(t)$. Såväl A/D och D/A omvandling antas ske idealt, dvs med försumbar tidsfördröjning och kvantiseringsdistortion. Bestäm signalen $y(t)$! (4p)

2. (a) En analog signal ges av

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

För att bestämma (vinkel-)frekvenserna ω_1 och ω_2 samplas signalen med $F_s = 1$ kHz, varefter $N = 32$ sampel samlas in. Man beräknar sedan en $L = 64$-punkters DFT av den digitala signalen. Det så erhållna "DFT-spektret" visas i nedanstående figur:



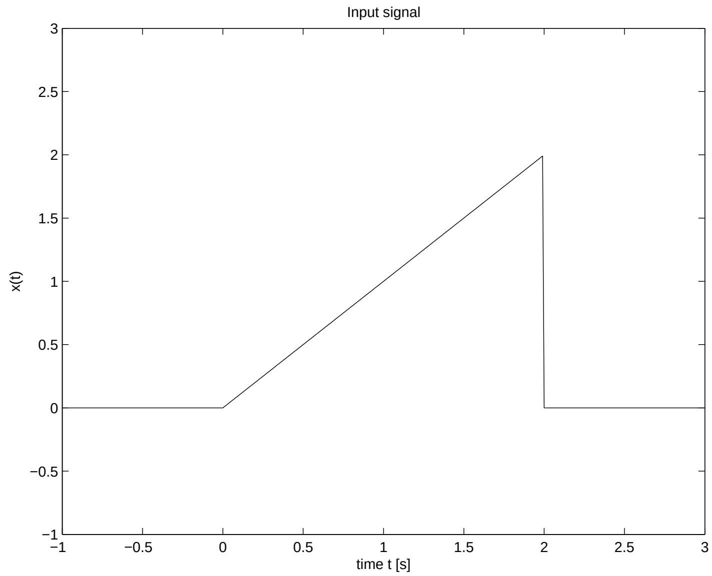
Ge ungefärliga värden på ω_1 och ω_2 (i rad/s)! (5p)

(b) Tal b) saknas!

3. En RC-krets beskrivs av följande differential-ekvation:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

där $x(t)$ betecknar pålagd inspänning och $y(t)$ resulterande utspänning. Beräkna och skissa utsignalen $y(t)$, då insignalen $x(t)$ ges av figuren överst på nästa sida. Antag att $RC = 1$. (10p)



4. Man önskar dimensionera ett lågpassfilter med 3 dB gränsfrekvens $f_c = 600$ Hz. DC-förstärkningen skall vara 10 dB. Filtrets amplitudkaraktäristik skall vara av Butterworth-typ:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2N}} \qquad \text{(Normaliserat filter)}$$

   (a) Bestäm filtrets gradtal N så att dämpningen vid $f_s = 1200$ Hz är minst 20 dB. (2p)

   (b) Ange en överföringsfunktion $H(s)$ som uppfyller ovanstående specifikationer. (6p)

   (c) Antag att ovanstående analoga filter omvandlas till ett digitalt filter med hjälp av bilinjär transformation:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

   Vad får det digitala filtret för 3 dB gränsfrekvens (i Hz) om samplingsfrekvensen är $f_s = 5$ kHz? (2p)

5. Ett fundamentalt problem inom trådlös kommunikation är flervägsutbredning. Detta resulterar i att mottagaren får en distorderad version av den utsända signalen. En möjlig räddning är att filtrera den mottagna signalen för att försöka återskapa originalet. En sådan anordning kallas en utjämnare (eng. equalizer). Vi skall i detta problem studera ett sätt att designa utjämnarfilter. Vi modellerar kommunikationskanalen (dvs flervägsutbredningen) som ett digitalt FIR-filter:

$$y[n] = h_0 x[n] + h_1 x[n-1] + h_2 x[n-2]$$

Här är $x[n]$ den utsända signalen, medan $y[n]$ är vad mottagaren ser. Kanalkoefficienterna ges av $h_0 = 1,\ h_1 = 0.2$ och $h_2 = 0.5$. Mottagarsignalen $y[n]$ filtreras med en FIR-utjämnare $B(z)$ av längd $M + 1$:

$$B(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Vi designar utjämnarens koefficienter b_k genom att använda en impuls som testsignal, dvs $x[n] = \delta[n]$. Idealt vill vi då även ha $z[n] = \delta[n]$, där $z[n]$ betecknar utsignalen från utjämnaren. Detta är dock inte alltid möjligt att uppnå.

(a) Bestäm impulssvaret för det totala systemet (kanal + utjämnare) från $x[n]$ till $z[n]$. (3p)

(b) Välj $M = 2$, och bestäm koefficienterna $\{b_k\}_{k=0}^{2}$ så att $z[0] = 1$ och $z[1] = z[2] = 0$. (5p)

(c) Med designen enligt ovan, vad blir det totala impulssvaret från $x[n]$ till $z[n]$? Hur kan man förbättra utjämnaren (dvs så att $z[n]$ blir mer lik $\delta[n]$)? (2p)

Lösningsförslag/svar till Tentamen i ESS 010 Signaler och System E3 13 december 2004

1. (a) Systemet har nollställen nära enhecscirkeln (radie 0.9) vid vinkelfrekvenserna $\omega = 0$ resp $\omega = \pi$ rad/sampel. Detta innebär att såväl låga som höga frekvenser dämpas. Polparet motsvarar vinkelfrekvensen $\omega = \pi/2$ rad/sampel, vilket innebär att denna frekvens förstärks. Filtret är alltså av bandpass-karaktär, dvs alternativ iii) är riktigt.

   (b) Systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Eftersom systemet är stabilt (poler i VHP) så inträffar stationäritet. Då gäller sinus in $\Rightarrow$ sinus ut:

$$x(t) = |G(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg(G(j\omega_0)))$$

där $\omega_0 = 4\pi$. Sätt $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

vilket ger att

$$|G(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2}} \approx 0.0064$$

och

$$\arg\{G(j\omega_0)\} = -\arg\{1 - 16\pi^2 + j4\pi\} = -\left(\pi - \arctan\frac{4\pi}{16\pi^2 - 1}\right) \approx -3.06$$

(observera att $1 - \omega_0^2 + j\omega_0$ är i andra kvadranten). Svar:

$$x(t) = 0.0064 \cos(4\pi t - 3.06)$$

(c) Signalens frekvens på 5 hz är högre än halva samplingsfrekvensen varför vikningsdistorsion inträffar. Utsignalens frekvens viks från 5 Hz kring $Fs/2 = 4$ Hz till frekvensen 3 Hz. Utsignalen blir således $y(t) = 3\sin(6\pi t)$.

2. (a) DFT är beräknad vid frekvenserna $\Omega_k = 2\pi k/L$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$, där $L = 64$. Periodogrammet har sina två högsta toppar vid $k = 3$ och $k = 11$. Observera att högra delen av periodogrammet är en spegelbild av den vänstra, eftersom vi har en reell signal. Topparna motsvarar frekvenserna $\omega_1 \approx (2\pi\, 3/64) \times F_s \approx 295$ rad/s och $\omega_2 \approx (2\pi\, 11/64) \times F_s \approx 1080$ rad/s.

   (b) Talet saknas i tesen!

3. Kretsens överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Enligt figur ges insignalen av

$$x(t) = t[u(t) - u(t-2)] = tu(t) - (t-2)u(t-2) - 2u(t-2)$$

Laplace-transformering ger

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s}$$

och utsignalens transform är därför

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s}\right)$$

Med hjälp av partialbråksuppdelningarna

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\
\frac{1}{s^2(s+1)} &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

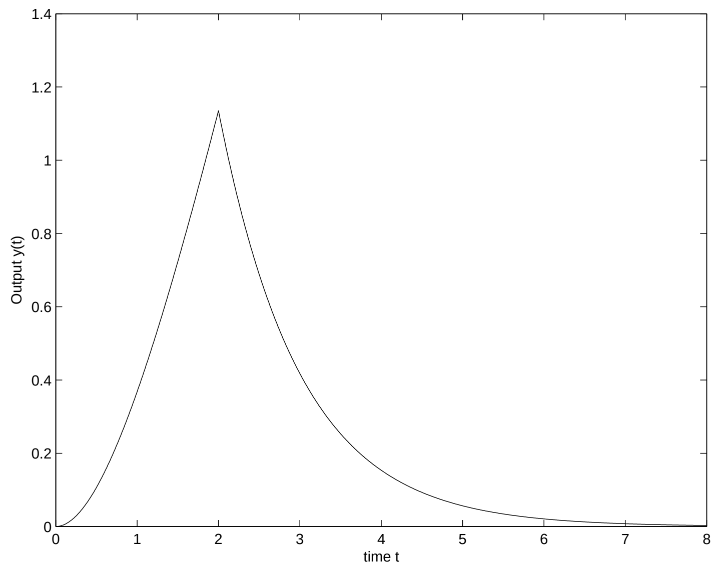
kan vi skriva $Y(s)$ som

$$Y(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s+1} + \frac{1-e^{-2s}}{s^2} - \frac{1-e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s+1} - \frac{2e^{-2s}}{s}$$

Inverstransformering ger nu slutligen utsignalen

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-t}u(t) + e^{-(t-2)}u(t-2) + tu(t) - (t-2)u(t-2) - u(t) - u(t-2) \\
&= [e^{-t} + t - 1]u(t) + [e^{-(t-2)} - t + 1]u(t-2)
\end{aligned}$$

Skiss:



4. (a) Eftersom $f_s/f_c = 2$ så skall N väljas så att det normaliserade filtret ger 20 dB dämpning vid $\omega = 2$:

$$|H(j2)|^2 = \frac{1}{1 + 2^{2N}} \leq 0.01$$

Vi får $2^{2N} \geq 99$, vilket kräver $N = 4$.

(b) Polerna ges av

$$s = \omega_c \times \{e^{\pm j5\pi/8},\, e^{\pm j7\pi/8}\}$$

där $\omega_c = 1200\pi$. Slå ihop parvis:

$$\begin{aligned}
(s - \omega_c e^{j5\pi/8})(s - \omega_c e^{-j5\pi/8}) &\approx s^2 + 2885s + 1.4212\, 10^7 \\
(s - \omega_c e^{j7\pi/8})(s - \omega_c e^{-j7\pi/8}) &\approx s^2 + 6966s + 1.4212\, 10^7
\end{aligned}$$

Med observationen att DC-förstärkningen skall vara 10 dB blir den sökta överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{K}{(s^2 + 2885s + 1.4212\, 10^7)(s^2 + 6966s + 1.4212\, 10^7)}$$

där $K = \omega_c^N\, 10^{10/20} \approx 6.3874\, 10^{14}$.

(c) Den bilinjära transformation ger upphov till "warping":

$$\Omega = 2 \arctan \frac{\omega T_s}{2}$$

Därför blir $\Omega_c \approx 0.7210$ rad/sampel, vilket motsvarar ca 574 Hz.

5. Detta problem löses enklast i frekvensplanet. Överföringsfunktionen för kanalen ($x[n]$ till $y[n]$) är

$$H(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.5z^{-2}$$

medan den för utjämnarfiltret ($y[n]$ till $z[n]$) är

$$B(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

(a) Den totala överföringsfunktionen är alltså

$$\begin{aligned} H_{tot}(z) = H(z)B(z) = b_0 + (0.2b_0 + b_1)z^{-1} + (0.5b_0 + 0.2b_1 + b_2)z^{-2} + \\ + \cdots + (0.5b_{M-2} + 0.2b_{M-1} + b_M)z^{-M} + \\ +(0.5b_{M-1} + 0.2b_M)z^{-(M+1)} + 0.5b_M z^{-(M+2)} \end{aligned}$$

Impulssvarskoefficienten $h_{tot}[k]$ fås nu som koefficienten framför z^{-k} ovan, dvs $h_{tot}[0] = b_0$, $h_{tot}[1] = 0.2b_0 + b_1$, $\ldots$, $h_{tot}[M+2] = 0.5b_M$.

(b) Identifiering av koefficienter ger att $b_0 = 1$, $0.2b_0 + b_1 = 0$ och $0.5b_0 + 0.2b_1 + b_2 = 0$. Utjämnaren (sk "zero-forcing equalizer") skall alltså väljas som

$$B(z) = 1 - 0.2z^{-1} - 0.46z^{-2}$$

(c) De sista impulssvarskoefficienterna blir nu $h_{tot}[3] = -0.2 \times 0.46 - 0.5 \times 0.2 = -0.192$ och $h_{tot}[4] = -0.46 \times 0.5 = -0.23$, dvs

$$h_{tot}[k] = \delta[k] - 0.192\,\delta[k-3] - 0.23\,\delta[k-4]$$

En bättre utjämnare kan åstadkommas genom att öka gradtalet på $B(z)$ och med en bättre designprincip.