CHALMERS 2012-10-25

MTF052 **STRÖMNINGSMEKANIK**

Tentamen lördagen den 27 oktober 2012, kl 14:00-19:00, V-huset (OBS! 5-timmarstenta)

Hjälpmedel: **Teoridelen:**
Inga hjälpmedel tillåtna

OBS! Före tentamen skall hjälpmedlen lämnas på en av vakten anvisad plats. Lösningarna på teoriuppgifterna inlämnas vid godtycklig tidpunkt, varefter hjälpmedlen får användas vid lösandet av problemen.

Problemdelen: Chalmersgodkänd räknare
Tillåtna hjälpmedel är läroboken ("Fluid Mechanics", Frank M. White), Data och Diagram, matematiska tabeller, räknedosa, av institutionen utgivna formelsamlingar och material, föreläsningsanteckningar - dock **ej** lösta exempel.

Lösningar: Anslås på institutionens anslagstavla måndag 29 oktober 2012

Betygsgränser: Maximal poängsumma är 85 p. Betyg 3 ≥34p, 4 ≥51p, 5 ≥68p

Tentaresultat: Meddelas senast onsdag 14 november 2012

Granskning: Torsdag 15 november 2012, kl 11.45-12.45
Fredag 16 november 2012, kl 11.45-12.45

Lärare under tentamen: Guillaume Jourdain, mobil 07.68.78.89.22
Bastian Nebenführ, mobil 07.65.83.91.66

Göteborg den 25 oktober 2012
Alf-Erik Almstedt, tel 772 1407

TILLÄMPAD MEKANIK
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg

Besök: Hörsalsvägen 7 B, 4 tr
Telefon: 031-772 37 87
E-post: ullt@chalmers.se
Webb: www.chalmers.se/am

Chalmers tekniska högskola AB
Organisationsnummer 556479-5598

Teoriuppgifter

T1. Definiera Reynolds tal och visa att det är dimensionslöst. (2p)

T2. Visa att tryckdifferensen $\Delta p = -\rho g \Delta z$ för en stillastående fluid, utgående från Newtons 2:a lag; **F**=ma. Antag ρ och g konstanta. (5p)

T3. Skriv om kontrollvolymsformuleringen av kontinuitetsekvationen

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\,V + \int_{CS} \rho(V \cdot n) dA = 0$$

för

a) endimensionella in- och utlopp
b) stationära förhållanden
c) inkompressibel strömning och instationära förhållanden (3p)

T4. Förenkla följande ekvationssystem för inkompressibel strömning med konstant temperatur. Teckna spänningstensorn med hjälp av Newtons ansats. Vilka obekanta storheter kan nu beräknas och hur många ekvationer har man till sitt förfogande?

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathrm{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}$$

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$ (5p)

T5. Varför vill man uttrycka fysikaliska ekvationer på dimensionslös form? (2p)

T6. Formulera Reynolds likformighetslag. (2p)

T7. Förklara hur man mäter hastigheten med ett Prandtlrör ("Pitot-Static Tube"). (3p)

T8. Vid Reynolds dekomposition delas hastighetskomponenterna och trycket upp i en tidsmedelvärderad och en fluktuerande del, t.ex. enl. $u = \overline{u} + u'$. Definiera tidsmedelvärdet samt visa att tidsmedelvärdet av den fluktuerande komponenten är noll. (3p)

T9. Skriv om trycktermen i gränsskiktsekvationen

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

som en funktion av friströmshastigheten, U, mha Bernoullis ekvation (med försummat höjdtryck). (2p)

T10. Vad är tryckgradienten för en tangentiellt anströmmad plan platta? Motivera! (2p)

T11. Härled ljudhastigheten för en godtycklig fluid. Under vilket antagande ska tryckderivatan beräknas? (6p)

Problem

P1. Man har i ett vindtunnelförsök mätt upp hastighetsprofilerna uppströms och nedströms en kropp, för vilken man vill bestämma strömningsmotståndet. Resultatet visas i figuren.

Uppströms är hastigheten konstant $V_1 = 10$ m/s och nedströms ges hastigheten av

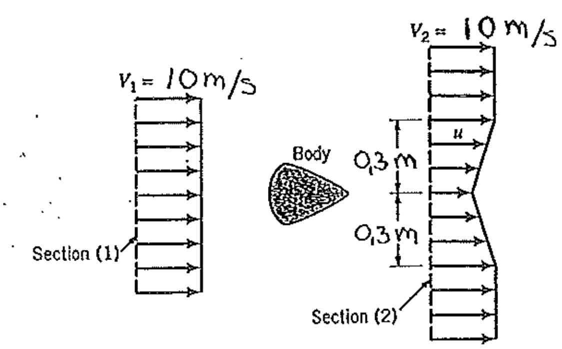
$$u = 10-3\left(1-\left|\frac{y}{0{,}3}\right|\right)m/s \qquad |y| \le 0{,}3m$$

$$u = 10 \text{ m/s} \qquad |y| > 0{,}3m$$

där y är avståndet till centrumlinjen.

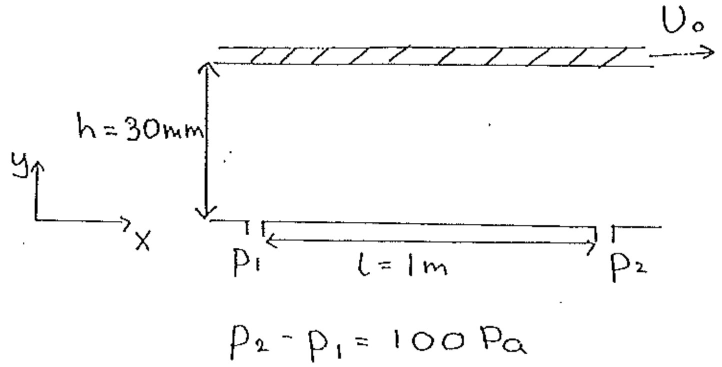
Antag att kroppen är 2-dimensionell, dvs att dess form inte ändras i riktningen normalt pappret.

Beräkna strömningsmotståndet på kroppen, per längdenhet in i pappret. Det statiska trycket i de båda tvärsnitten är $p_1 = p_2 = 101{,}3$ kPa om luftens densitet är $1{,}2 \text{ kg/m}^3$. (10p)



P2. I en s k Couette-strömning (laminär, stationär strömning mellan två plana plattor), uppmätes en tryckdifferens på 100 Pa mellan två statiska tryckuttag, se figur. Avståndet mellan tryckhålen är 1,0 m. Tryckgradienten i strömningsriktningen kan anses vara konstant, och avståndet mellan plattorna, som kan anses ha oändlig utsträckning, är 30 mm.

Vilken hastighet skall den övre plattan ha, för att man skall få en nettotransport, dvs ett volymflöde i positiv x-riktning om fluiden är vatten?



(10p)

P3. Från en stor oljetank pumpas 0,60 kg/s olja genom en 230 m lång rörledning med diametern 0,030 m. Skrovligheten på rörets insida, ε, är 0,40 mm. Hur stor effekt måste tillföras oljan i en förlustfri pump? Röret utmynnar i omgivningen 8,8 m högre än tankens yta. Oljans viskositet är $55 \cdot 10^{-6}$ m^2/s och dess densitet är 850 kg/m^3. (10p)

P4. En stressad teknologgrupp ska göra en strömningslaboration och mäta upp hastighetsprofilen på en tangentiellt anströmmad plan platta i en vindtunnel. Lufttemperaturen är 20° C och de mäter med en tunn varmtråd 3 m från plattans framkant. Den första mätningen går bra och de får en tidsmedelvärderad hastighet av 3 m/s i en punkt 3 mm ut från plattan. Sedan råkar de tyvärr göra sönder varmtråden innan de hinner mäta någon mer punkt. Hjälp den stackars gruppen att bestämma väggskjuvspänningen, friströmshastigheten och gränsskiktstjockleken på det aktuella avståndet från plattans framkant. (10p)

P5. Till en stor luftbehållare med trycket 2,0 MPa och temperaturen 27°C anslutes en lavaldysa (konvergent-divergent munstycke) konstruerad för tryckförhållandet 0,10. Utloppsarean är 10 cm^2. Beräkna

a) massflödet
b) mynningshastigheten

om luften utströmmar i en omgivning med trycket 100 kPa. (10p) impulssatsen i x-led:

$$\Sigma \mathbb{F} = \int_{CS} \mathbb{V}\rho(\mathbb{V}\cdot n)\,dA =$$

(inga tryckkrafter $p_1 = p_2$)

$$-\dot{m}V_1 + \int_{CS2} \rho V^2 dA =$$

$$-\rho V_1^2 2h\,dz + \rho\,dz\,2\int_0^h u^2 dy =$$

$$= -2\rho V_1^2 h\,dz + 2\rho\,dz\int_0^h (7+10y)^2 dy$$

$$= -2\rho V_1^2 h\,dz +$$

$$+ 2\rho\,dz \int_0^h (49 + 100y^2 + 140y)\,dy$$

$$= -2\rho V_1^2 h\,dz +$$

$$+ 2\rho\,dz\left[49y + \frac{100y^3}{3} + \frac{140y^2}{2}\right]_0^h =$$

$$= -2\rho V_1^2 h\,dz +$$

$$2\rho\,dz\left(49h + \frac{100}{3}h^3 + 70h^2\right)$$

$$\frac{F}{dz} = -2\rho V_1^2 h +$$

$$+ 2\rho\left(49h + \frac{100}{3}h^3 + 70h^2\right)$$

$$= -19{,}44\ N/m$$

F är kraften på kontrollvolym
Kraften på kroppen $F_D = -F$

$$F_D = 19{,}44\ N/m$$

Navier-Stokes i x-riktningen

1) endast hast i x-led $u = u(y)$
2) inga masskrafter
3) stationärt

$$\Rightarrow \mu\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$ (tryckgrad. är konst.)

integrera:

$$U(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{y^2}{2} + Ay + B$$

RV $\begin{cases} y=0 & U=0 \\ y=h & U=U_0 \end{cases}$ (no-slip)

$$\Rightarrow B = 0$$

$$A = \frac{U_0}{h} - \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{h}{2}$$

$$U(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{y^2}{2} + \left(\frac{U_0}{h} - \frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{h}{2}\right)y =$$

$$= \ldots = \frac{U_0 y}{h} + \frac{\Delta p}{2\mu\Delta x}(y^2 - hy)$$

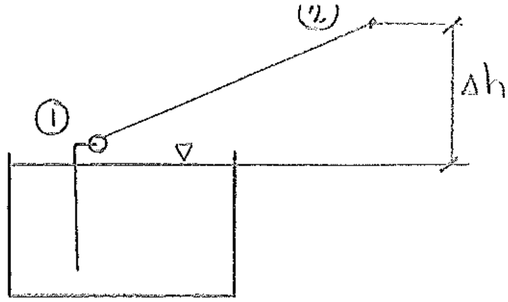
Volymflöde: $Q = \int_A u\,dA$

$$Q = dz\int_0^h \frac{U_0 y}{h} + \frac{\Delta p}{2\mu\Delta x}(y^2 - hy)\,dy$$

$$= \ldots = \frac{U_0 h}{2} - \frac{\Delta p}{2\mu\Delta x}\frac{h^3}{6}$$

$Q = 0$ ger gränsfall

$$\Rightarrow U_0 = \frac{\Delta p\, h^2}{6\mu\Delta x} = \underline{\underline{15\ m/s}}$$



SÖKT: TILLFÖRD EFFEKT I PUMPEN.

BERNOULLIS UTV. EKVATION GER:
3.68b)

$$p_1 + \rho\frac{V_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho\frac{V_2^2}{2} + \rho g h_2 + \Delta p_f + \rho \dot{W}_s$$

$$-\rho \dot{W}_s = \rho \cdot g(h_2 - h_1) + \rho\frac{V^2}{2} + \Delta p_f$$

$$\Delta p_f = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \rho\frac{V_1^2}{2}$$

BESTÄM V OCH f!

K.E $\Rightarrow$ $\dot{m} = \rho \cdot A \cdot V$ $\Rightarrow$ $V = 1.00$ [m/s]

TURBULENT ELLER LAMINÄRT:

$$Re_d = \frac{V \cdot d}{\nu} = 545 \Rightarrow \text{LAMINÄRT} \Rightarrow f = \frac{64}{Re} = 0.117$$

$$-\dot{W}_s = g \cdot \Delta h + \left(1 + \frac{fL}{d}\right)\frac{V^2}{2} = 535 \; [\text{Nm/kg}]$$

MEN EFFEKTEN $|P| = \dot{m}\,|\dot{W}_s| = 0.60 \cdot 535 = 321$ [W]

SVAR: $|P| = 321$ W

Givet: $x = 3$ m, $y = 0{,}003$ m, $\bar{u} = 3$ m/s
Luft, $t = 20°C$, Tabell 1.4 $\Rightarrow$
$\mu = 18 \cdot 10^{-6}$ kg/ms, $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $\rho = 1{,}2$ kg/m³

Sökt: τ_w, U och δ

Lösning: Laminärt eller turbulent?
Beräkna Re_x baserat på $\bar{u}$

$$Re_x = \frac{\bar{u}\,x}{\nu} = \frac{3 \cdot 3}{15 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^5 > 5 \cdot 10^5$$

alltså bör Re_x baserat på U vara ändå större
$\Rightarrow$ Sannolikt turbulent

log-lagen: $\frac{\bar{u}}{u^*} = 2{,}44 \ln\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) + 4{,}9$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{u^*} - 4{,}9\right) \cdot \frac{1}{2{,}44} = \ln \frac{u^* \cdot 0{,}003}{15 \cdot 10^{-6}}$$

Iterera fram u^*

	VL	HL
Gissa $u^* = 0{,}2$ m/s	4,14	3,68
0,22	3,58	3,78
0,213	3,76	3,75

$u^* = 0{,}213$ m/s, kolla $y^+ = \frac{u^* y}{\nu} = 42{,}6$ ∴ log-omr OK

$$\tau_w = \rho u^{*2} = 0{,}054 \text{ Pa}$$

(7.44) $\Rightarrow$

$$U = \left(\frac{\tau_w\, x^{1/7}}{0{,}0135\, \mu^{1/7} \rho^{6/7}}\right)^{7/13} = 4{,}89 \text{ m/s}$$

$$Re_x = \frac{4{,}89 \cdot 3}{15 \cdot 10^{-6}} = 9{,}78 \cdot 10^5$$

(7.1) $\Rightarrow$ $\delta = \frac{0{,}16\,x}{Re_x^{1/7}} = 0{,}067$ m

(giltig för $Re_x > 1 \cdot 10^6$)

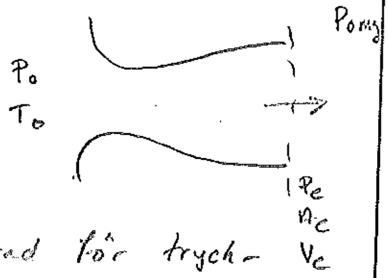
GIVET:

$P_0 = 2{,}0\,MPa$

$T_0 = 27°C = 300\,K$

$A_e = 10\,cm^2 = 10 \cdot 10^{-4}\,m^2$

$P_{omg} = 100\,kPa$



Munstycket är konstruerad för tryck-förhållandet $1/10$.

SÖKT: a) $\dot{m}$

b) V_e

LÖSNING: Munst. är konstruerat för tryck-förhållandet $1/10$; dvs $P_e/P_0 = 1/10$. Detta ml. : $P_e = P_0/10 = \frac{2{,}0 \cdot 10^6}{10} = 200\,kPa$.

Nu är $P_e = 200\,kPa > P_{omg} = 100\,kPa$

$\Rightarrow P_e = 200\,kPa \neq P_{omg}$. och strömn. är kritisk. (Expansionen från P_e till P_{omg} sker irreversibelt utanför mynningen)

$Ma = 1$ uppnås i munst. minsta sektion, där tryck, temp. osv. ges av de kritiska storheterna, bet. med $*$

Luft $\Rightarrow k = 1{,}4$, $R = 287\ m^2/s^2K$

$$(9.47) \Rightarrow \dot{m} = \frac{0{,}6847\,P_0 A^*}{(RT_0)^{1/2}}$$

Studera utloppet:

$P_e/P_0 = 0{,}10$

Tabell 8.1 $\Rightarrow Ma_e = 2{,}16$;

$A_e/A^* = 1{,}9354$; $T_e/T_0 = 0{,}5173$.

$\Rightarrow A^* = A_e/1{,}9354 \Rightarrow$

$$\dot{m} = \frac{0{,}6847 \cdot P_0 \cdot A_e}{(RT_0)^{1/2} \cdot 1{,}9354} \approx 2{,}41\ kg/s$$

$$V_e = Ma_e \cdot a_e = Ma_e \cdot \sqrt{kRT_e} = Ma_e \cdot \sqrt{kR \cdot 0{,}5173\,T_0} \approx 539\ m/s$$

Svar: a) $\dot{m} = 2{,}41\ kg/s$

b) $V_e = 539\ m/s$